HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 193

Das Übertragungsverhalten zweier beliebig stark verkoppelter Leitungsresonatoren und die Anwendung auf eine Störwellenanalyse im H_{01}-Kreishohlleiter

von

Dipl.-Ing. Ernst Jürgen Bachus

Berlin

1 9 7 6

EINSTEINUFER 37 1000 BERLIN 10

DAS ÜBERTRAGUNGSVERHALTEN ZWEIER BELIEBIG STARK VERKOPPELTER LEITUNGSRESONATOREN UND DIE ANWENDUNG AUF EINE STÖRWELLENANALYSE IM H_{01}-KREISHOHLLEITER

AUGUST 1976

E. J. BACHUS

TECHNISCHER BERICHT Nr. 193

Das Übertragungsverhalten zweier beliebig stark verkoppelter Leitungsresonatoren und die Anwendung auf eine Störwellenanalyse im H_{01}-Kreishohlleiter

Übersicht

Das Übertragungsverhalten zweier seriengekoppelter und zweier parallel verkoppelter Leitungsresonatoren wird allgemein als Erweiterung der Übertragungsfunktion eines einfachen Leitungsresonators ohne Näherungen abgeleitet und für Sonderfälle in zahlreichen Bildern dargestellt. Die Kopplung darf dabei beliebige Werte zwischen Null und Eins (= totale Kopplung) annehmen.

Die Analyse gestörter Resonanzen im H_{01}-Kreishohlleiter liefert die Koppelfaktoren und Phasenkonstanten angeregter Störwellen.

Allgemeine Begriffe wie Streumatrix, Signalflußdiagramm, Reflexion, Transmission, Bandbreite und kritische Kopplung werden erläutert.

Der Bearbeiter

(Dipl.-Ing. E. J. Bachus)

Ernst-Jürgen Bachus

Der Abteilungsleiter

W. Herold

(Dr.-Ing. W. E. Herold)

Der Geschäftsführer

H. Ohnsorge

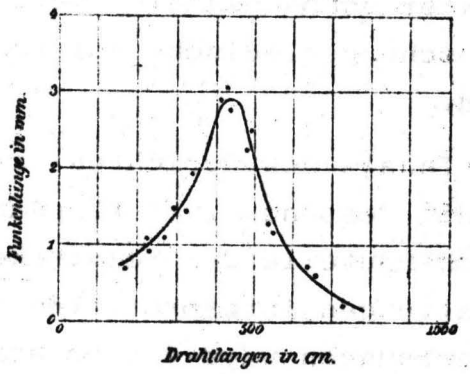
(Dr.-Ing. H. Ohnsorge)

Berlin 10, den 30. August 1976

Inhalt

Einleitung

"...Lässt man also zwei Stromkreise aufeinander wirken, von welchen man nahezu gleiche Schwingungsdauer voraussetzen darf, und ändert nun die Capacität oder das Selbstpotential und damit die Schwingungsdauer eines derselben continuirlich ab, so muss sich die Resonanz dadurch äussern, dass für bestimmte Werthe dieser Grössen die Inductionswirkung beträchtlich stärker ausfällt, als für die beiderseits benachbarten Werthe."



(Heinrich Hertz: "Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen" 1887)

Die ersten Resonanzmessungen in der Geschichte der Elektrotechnik führte Heinrich Hertz vor knapp einhundert Jahren mit einer Schaltung aus, die bereits einem zweistufigem Resonator entspricht.

Ein einfacher Leitungsresonator entsteht, wenn ein Leitungsstück beidseitig nicht angepaßt abgeschlossen wird: zwischen diesen Fehlanpassungen bilden sich - im Resonanzfall - stehende Wellen aus. Es ist leicht einzusehen, daß dabei die Leitungslänge mindestens in der Größenordnung der Wellenlänge liegen muß.

Für die Berechnung ist es üblich, den so entstandenen Leitungsresonator auf einen Schwingkreis aus konzentrierten Elementen zurückzuführen, weil die mit der Rundfunktechnik entwickelte Filtertheorie ein wohl bekannter Bestandteil der Theorie linearer Netzwerke ist.

Der vorliegende Bericht zeigt, daß bei den drei untersuchten Netzwerken (der einfache, der serien- und der parallelgekoppelte Leitungsresonator) die Beschreibung vom Standpunkt der Leitungstheorie anschaulicher und exakter ist als das Zurückführen auf Ersatz - Netzwerke aus konzentrierten Elementen. Anschaulicher, weil die Vorstellung hin- und rücklaufender

Wellen dem tatsächlichen Energietransport entspricht, exakter schon deshalb, weil das für Leitungsresonatoren typische periodische Auftreten von Resonanzen berücksichtigt wird.

Der Inhalt des Berichtes ist eine notwendige Voraussetzung, um die Messungen von Dämpfung und Störwellenanregung, erzeugt durch Bauteile des Weitverkehrshohlleiters in Test - Resonanzschaltungen interpretieren zu können. Den durchzuführenden Berechnungen wird die bekannte Tatsache zugrunde gelegt, daß sich die verwickelten Vorgänge in Multi - Mode - Resonatoren durch die Zusammenschaltung von einzelnen, und wie sich zeigen wird von einfachen Leitungsresonatoren darstellen lassen.

Es wird versucht, die Ergebnisse so allgemein wie möglich zu formulieren, um sie auch für andere Mikrowellennetzwerke mit ähnlicher Struktur verwenden zu können.

Die verwendeten Formelzeichen

A, B	Abkürzungen
$\underline{A}_{n,m}$	Matrixelement, dimensionslos
$(\underline{A})$	Matrix
$\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$	hinein/herauslaufende Wellengröße der Leitung 1 bzw. des Hauptwellentyps [$W^{1/2}$]
$\underline{a}_2$, b_2	dito für Leitung 2 oder den Störwellentyp
a	Reflexionsdämpfung einer Blende [Neper]
b	Reflexionswinkel einer Blende [rad]
$a_1 = \alpha_1 l + a$	Gesamtdämpfung für Resonator 1 bzw. Hauptwelle [Neper]
$a_2 = \alpha_2 l + a$	Gesamtdämpfung für Resonator 2 bzw. Störwelle [Neper]
$c = 2,99798 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$	Vakuumlichtgeschwindigkeit
$\underline{C}$	Koppelfaktor, dimensionslos
D	normierte Dämpfungsgröße, dimensionslos
f	Frequenz [Hertz]
$k = \frac{\omega}{c}$	Wellenzahl [$\frac{1}{m}$]
K	normierte Koppelgröße, dimensionslos
l	Resonatorlänge [m]
N_1, N_2	Zahl der Halbwellen im Resonator des Wellentyps 1 bzw. 2
P	Strahlungswirkleistung [W]
q	Eigenwert eines Wellentyps [$\frac{1}{m}$]
$\underline{r}$	Reflexionsfaktor, dimensionslos
$(\underline{S})$	Streumatrix

$\underline{S}_{m,n}$	Streumatrixelement, dimensionslos
$\underline{T}$	Transmission, dimensionslos
$x_1 = \beta_1 l - N_1 \cdot \pi$	Phasenabweichung des Hauptwellentyps von seiner Resonanz N_1 [rad]
$x_2 = \beta_1 l - N_2 \cdot \pi$	Phasenabweichung des Störwellentyps von seiner Resonanz N_2 [rad]
x_{20}	Verstimmung (x_2 für $x_1 = 0$) [rad]
$\frac{\partial x_{20}}{\partial l}$	Verstimmungsfaktor [rad/m]
z	Koordinate in Ausbreitungsrichtung [m]
Z_o	Wellenwiderstand im verlustlosen Dielektrikum [Ω]
$\underline{Z}_\sigma$	Wellenwiderstand im leitenden Metall [Ω]
α_1, β_1	Dämpfungs- und Phasenbelag der Leitung 1 oder des Hauptwellentyps [Neper, rad]
α_2, β_2	Dämpfungs- und Phasenbelag der Leitung 2 oder des Störwellentyps [Neper , rad]
$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$	die entsprechenden Ausbreitungskonstanten
λ	Leitungswellenlänge in Ausbreitungsrichtung [m]
$\underline{\varrho}$	Reflexionskoeffizient , dimensionslos
$\underline{\tau}$	Transmissionskoeffizient, dimensionslos
σ	Leitfähigkeit $\left[\frac{1}{m \cdot \Omega}\right]$

0 Allgemeine Vorbetrachtungen

0.1 Wellengrößen

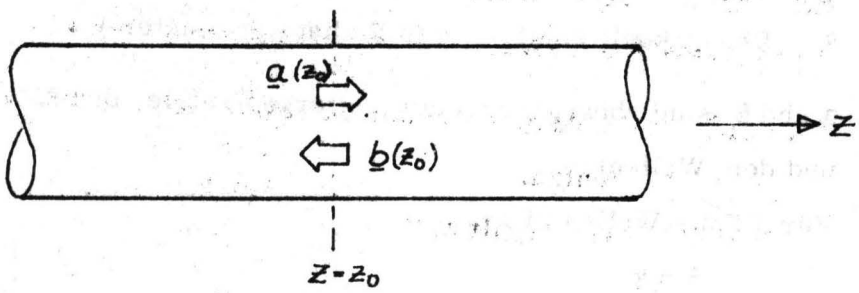
Für die Berechnung von linearen Netzwerken in der Hochfrequenztechnik und insbesondere in der Mikrowellentechnik verwendet man gerne die Darstellung mit Wellengrößen.

Für eine beliebige Leitung (TEM - Wellen, H- oder E-Wellen) mit z als Ausbreitungsrichtung definiert man die komplexe Wellengröße $\underline{a}(z)$ durch die Angabe von Betrag und Phase :

Betrag $\{\underline{a}(z)\}$ = Wurzel aus der in + z Richtung laufenden Strahlungswirkleistung an der Stelle z.

Phase $\{\underline{a}(z)\}$ = Phase des in + z - Richtung laufenden transversalen elektromagnetischen Feldes an der Stelle z .
Das transversale elektrische und das transversale magnetische Feld sollen in einer Querschnittsebene zeitlich in Phase sein.

Analog kann man die in - z Richtung laufende Strahlungswirkleistung durch eine Wellengröße $\underline{b}(z)$ erfassen.
Aus Gründen der Bequemlichkeit werde die beliebige Leitung durch einen Kreiszylindrischen Hohlleiter symbolisiert :

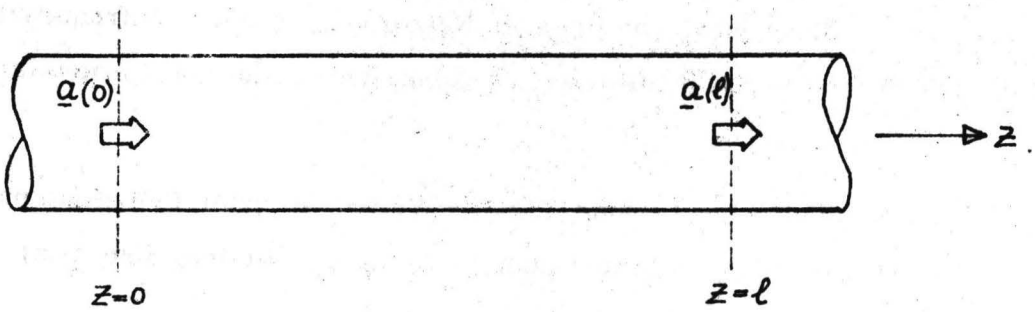


Die gesamte in +z-Richtung laufende Wirkleistung an der Stelle z_o ist dann z. B. :

$$P^{+}_{wirk}(z_o) = |\underline{a}(z_o)|^2 - |\underline{b}(z_o)|^2$$

$$P^{+}_{wirk} = |\underline{a}^2| - |\underline{b}^2| \text{ für beliebiges } z. \qquad (1)$$

0.2 Das Übertragungsverhalten von Leitungen



Nach Durchlaufen der Strecke l hat $\underline{a}$ eine Schwächung infolge von Verlusten im Dielektrikum und infolge Wandstromverlusten erlitten :

$$|\underline{a}(l)| = |\underline{a}(o)| \cdot e^{-\alpha l}$$

Der Zeiger $\underline{a}$ hat (bei festgehaltener Zeit t) eine Drehung erfahren die durch

$$e^{-j\beta l}$$

beschrieben werden kann.

$$\underline{a}(l) = \underline{a}(o) \cdot e^{-(\alpha + j\beta) l} \qquad (2)$$

α = Dämpfungskoeffizient (in Neper pro Meter)

β = Phasenkoeffizient (in Radiant pro Meter) .

α und β sind abhängig von der Leitergeometrie, den Materialkonstanten μ , ϵ, σ und dem Wellentyp.

Für TEM - Wellen gilt z. B.

$$\beta = k \qquad (3)$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c} = \text{Phasenkonstante einer ebenen Welle}$$

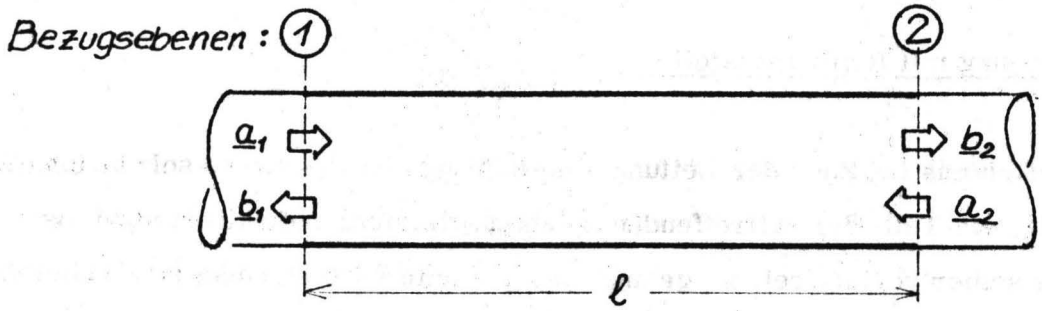
Für Hohlleiterwellen gilt :

$$\beta = \sqrt{k^2 - q^2} \qquad (4)$$

mit q = Eigenwert des jeweiligen Wellentyps.

0.21 Die Leitung als Zweitor

Ein Leitungsabschnitt der Länge l wird beschrieben durch eine 2 x 2 Matrix wobei folgende Zählrichtungen vereinbart werden :



$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{-(\alpha + j\beta)l} \\ e^{-(\alpha + j\beta)l} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

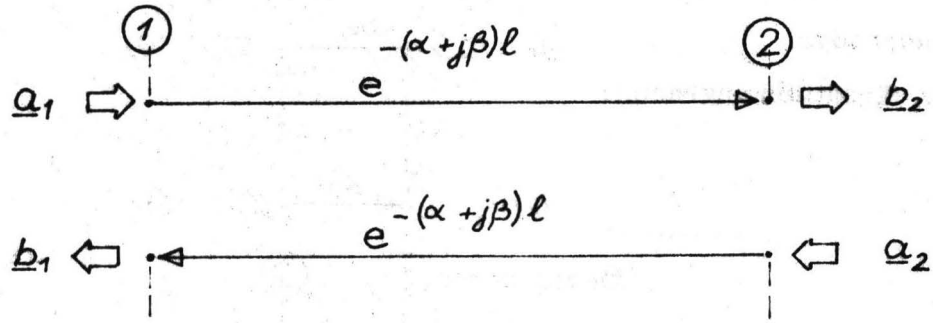
In den Leitungsabschnitt hineinlaufende Wellengrößen werden mit $\underline{a}$, herauslaufende Wellengrößen mit $\underline{b}$ bezeichnet.

Der Index gibt die Bezugsebenen an.

Diese Matrix wird als <u>Streumatrix</u> bezeichnet. Ausführliches findet man z. B. in [1] .

Sehr übersichtlich ist die Darstellung als

<u>Signalflussdiagramm :</u>

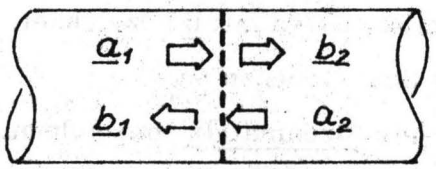


Die Regeln über das Aufstellen von linearen Signalflußdiagrammen und das Rechnen mit ihnen findet man in [2], viele Anwendungsbeispiele in der Mikrowellenmeßtechnik in [3].

0.3 Eine Leitung mit Reflexionsstelle

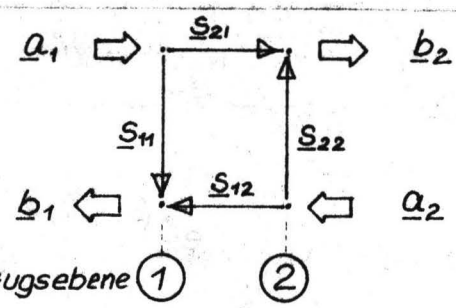
Wir denken uns im Zuge der Leitung eine Störung eingebaut. Sie soll so beschaffen sein, daß ein Teil der auftreffenden Strahlungsleistung reflektiert wird. Ist diese Störung selber verlustfrei, so gelangt der gesamte verbleibende Anteil über dieses Hindernis hinweg (wird transmittiert), ist sie verlustbehaftet, so ist die Transmission geringer. Eine solche Reflexionsstelle im Zuge einer Leitung kann z. B. ein Querschnittssprung einer Koaxialleitung, die Unterbrechung des Innenleiters oder eine schlechte Flanschverbindung zwischen Hohlleitern sein. Oder gewollt: Blenden und Abstimmschrauben im Hohlleiter zur Erzeugung eines bestimmten Reflexionsfaktors. Vorausgesetzt soll noch werden, daß an dieser Reflexionsstelle keine Störwellen angeregt werden.

In der Skizze ist die Reflexionsstelle als unendlich dünnes Metallsieb im Kreishohlleiter eingezeichnet, dazu die auffallenden und reflektierten Wellengrößen :



Auch wenn das Sieb keine Ausdehnung in z-Richtung hat, so wird es dennoch durch ein 2-Tor (= Vierpol, schwarzer Kasten) beschrieben. Die Bezugsebenen sind unmittelbar links und rechts von der Blende zu denken und haben den Abstand Null voneinander.

Das Signalflußdiagramm:



und die zugehörige Streumatrix :

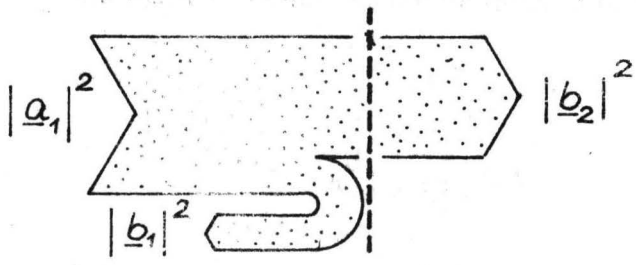
$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

Da die " Durchlässigkeit " des Siebes von links nach rechts dieselbe wie von rechts nach links ist, gilt für die Transmissionskoeffizienten

$$|\underline{S}_{21}| = |\underline{S}_{12}| \qquad (6)$$

Reziprozität, Übertragungssymmetrie. Gilt für alle passiven Zweitore.

Stellt man eine Leistungsbilanz für die von links ankommende Welle auf ($\underline{a}_2 = 0$),



so folgt aus

$$|\underline{b}_1|^2 + |\underline{b}_2|^2 = |\underline{a}_1|^2$$

$$|\underline{S}_{11}\,\underline{a}_1|^2 + |\underline{S}_{21}\,\underline{a}_1|^2 = |\underline{a}_1|^2$$

die wichtige Beziehung :

$$\boxed{|\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1}$$

und analog für eine von rechts einfallende Welle: (7)

$$\boxed{|\underline{S}_{22}|^2 + |\underline{S}_{12}|^2 = 1}$$

Wegen der Übertragungssymmetrie Gl. (6) gilt auch :

$$\boxed{|\underline{S}_{11}| = |\underline{S}_{22}|}$$

Um zu einer Phasenbeziehung zwischen den Streumatrixelementen zu kommen, macht man einen allgemeinen, auch für Mehrtore gültigen Ansatz [1]:

Gegeben sei ein n - Tor mit der Streumatrix $(\underline{S})$, dem Spaltenvektor der hineinlaufenden Wellengrößen $(\underline{a})$ und dem Spaltenvektor der herauslaufenden Wellengrößen $(\underline{b})$:

$$(\underline{b}) = (\underline{S}) \cdot (\underline{a})$$

Die gesamte herauslaufende Leistung erhält man aus dem Spaltenvektor $(\underline{b})$, indem man die quadrierten Beträge der einzelnen $\underline{b}$ aufsummiert:

$$\underline{b}_1^* \cdot \underline{b}_1 + \underline{b}_2^* \cdot \underline{b}_2 + \ldots\ldots \underline{b}_n^* \cdot b_n$$

In Matrix - Schreibweise ist dies der Ausdruck: $(\underline{b}^*)^T \cdot (\underline{b})$.

$(\underline{b}^*)^T$ ist der transponierte Spaltenvektor (= Zeilenvektor) von (b^*).

Er lässt sich durch $(\underline{a})$ ausdrücken:

$$(\underline{b}^*)^T = (\underline{a}^*)^T \cdot (\underline{S}^*)^T$$

Die hineinlaufende Leistung $(\underline{a}^*)^T \cdot (\underline{a})$ soll nun gleich der herauslaufenden Leistung $(b^*)^T \cdot (\underline{b})$ sein:

$$(\underline{b}^*)^T \cdot (\underline{b}) = (\underline{a}^*)^T \cdot (\underline{S}^*)^T \cdot (\underline{S}) \cdot (\underline{a}) \overset{!}{=} (\underline{a}^*)^T \cdot (\underline{a})$$

Das ist nur dann der Fall wenn

$$(\underline{S}^*)^T \cdot (\underline{S}) = (E), \quad (E) = \text{Einheitsmatrix} \tag{8}$$

Erfüllt eine Matrix die Gleichung (8) nennt man sie "unitär".

Für unser Zweitor lautet Gl. (8) ausgeschrieben :

$$\begin{pmatrix} \underline{S}_{11}^* & \underline{S}_{21}^* \\ \underline{S}_{12}^* & \underline{S}_{22}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8a)$$

Neben den bereits oben angeschriebenen Betragsgleichungen erhält man auch eine Phasenbeziehung zwischen den Streumatrixelementen:

$$\underline{S}_{11}^* \cdot \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21}^* \cdot \underline{S}_{22} = 0$$

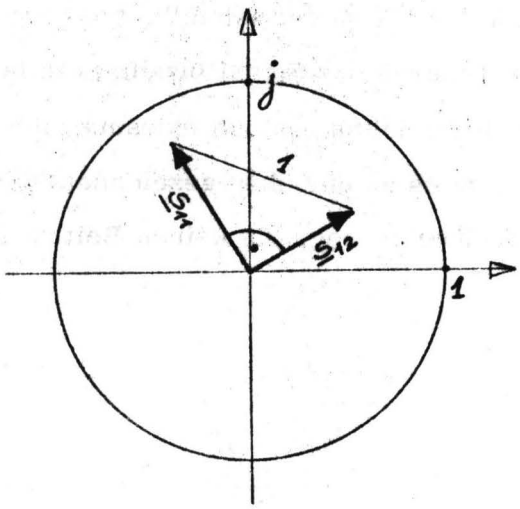
und hieraus :

$$\boxed{\operatorname{arc}\left\{\underline{S}_{11}\right\} + \operatorname{arc}\left\{\underline{S}_{22}\right\} = \pi + \operatorname{arc}\left\{\underline{S}_{12}\right\} + \operatorname{arc}\left\{\underline{S}_{21}\right\}} \qquad (9)$$

Aus (8a) lässt sich noch ableiten :

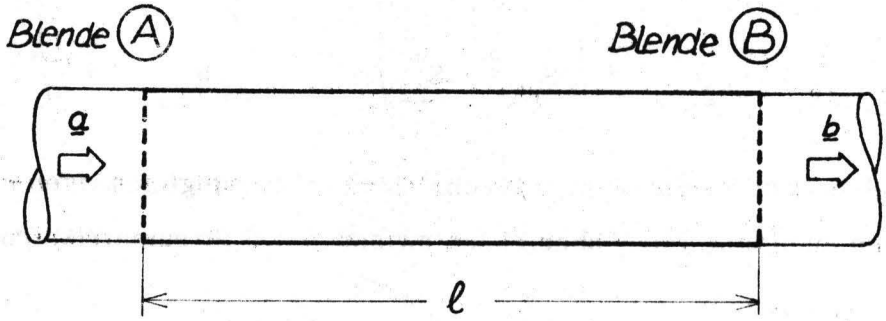
$$\operatorname{Det}\left\{\underline{S}\right\} = \frac{\underline{S}_{22}}{\underline{S}_{11}^*} = -\frac{\underline{S}_{12}}{\underline{S}_{21}^*} \quad \text{d.h.} \quad \left|\operatorname{Det}\left\{\underline{S}\right\}\right| = 1$$

Der Betrag der Streumatrixdeterminate eines verlustlosen Zweitores ist Eins. Für vollständige Symmetrie : $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}$, $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$ gibt es eine einfache geometrische Deutung :

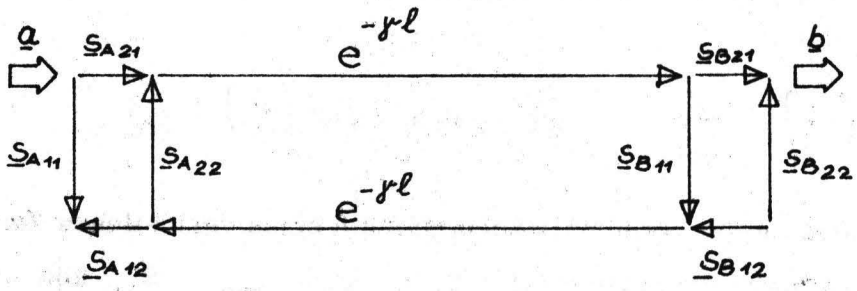


1 Der einfache Leitungsresonator

In unsere Leitung seien im Abstand l zwei Reflexionsstellen in Form von (Vielloch -) Blenden eingebaut. Beide Blenden sollen symmetrisch und verlustlos sein.

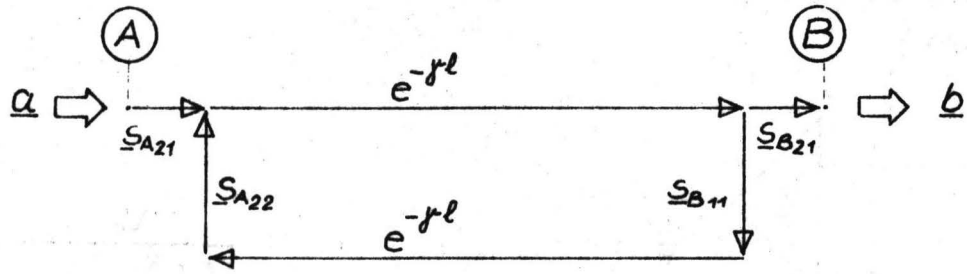


Das Signalflussdiagramm, resultierend aus der Kettenschaltung von : Blende A - Leitungsstück l - Blende B hat die Form :



Fragt man z. B. nach der " Transmission " , so interessieren auch nur die Wege, die die Wellengröße a durch das Signalflussdiagramm hindurch nehmen kann (immer entlang der Pfeilrichtungen und jedesmal multipliziert mit dem darangeschriebenen Faktor), um es an der oben gezeichneten Stelle als b wieder zu verlassen. Läßt man die Zweige weg, die keinen Beitrag zur " Transmission" liefern,

vereinfacht sich das Signalflussdiagramm :



Die Transmission von (A) (unmittelbar <u>vor</u> Sieb A) nach (B) (unmittelbar <u>hinter</u> Sieb B)

$$\underline{T}_{A \to B} = \underline{T}_{BA} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}$$

läßt sich berechnen aus den "Pfaden" und "Schleifen" des Signalflussdiagramms nach der "Pfad-Schleifen-Regel" [2], [3] .

Jeder Weg von (A) nach (B), der keinen Knoten zweimal berührt, ist ein Pfad.

Jeder geschlossene Weg im Signalflussdiagramm ist eine Schleife (Schleife 1. Ordnung).

Hier gibt es nur einen Pfad :

$$\text{Pfad} = \underline{S}_{A_{21}} \cdot e^{-\gamma l} \cdot \underline{S}_{B_{21}}$$

und nur eine Schleife :

$$\text{Schleife} = e^{-\gamma l} \cdot \underline{S}_{B_{21}} \cdot e^{-\gamma l} \cdot \underline{S}_{A_{22}}$$

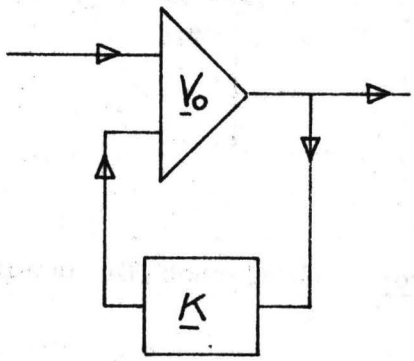
Die Transmission nach der Pfad-Schleifen-Regel lautet dann:

$$\underline{T}_{BA} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \frac{\text{Pfad}}{1 - \text{Schleife}}$$

$$\boxed{\underline{T} = \frac{\underline{S}_{A_{21}} \cdot \underline{S}_{B_{21}} \cdot e^{-\gamma l}}{1 - \underline{S}_{A_{22}} \cdot \underline{S}_{B_{11}} \cdot e^{-2\gamma l}}} \qquad (10)$$

Nebenbei :

Es sei an den Spannungsverstärkungsfaktor eines rückgekoppelten Verstärkers erinnert:



$$\underline{V} = \frac{V_o}{1 - \underline{K} \cdot \underline{V}_o}$$

Gl. (10) soll nun weiter umgeformt werden.

Schreibt man die Reflexionsfaktoren $\underline{S}_{A_{22}} = \underline{S}_{B_{22}}$ und $\underline{S}_{B_{11}} = \underline{S}_{B_{22}}$ in exponentieller Form :

$$\boxed{\underline{S}_{A_{22}} = e^{-a_A + jb_A}}$$

$$\boxed{\underline{S}_{B_{11}} = e^{-a_B + jb_B}} \qquad (11)$$

mit

a_A = Reflexionsdämpfung an Sieb A [Neper]

a_B = " " " B [Neper]

b_A = Phasensprung bei Reflexion an Sieb A [Radiant]

b_B = " " " " " B [Radiant]

(a und b sind nicht zu verwechseln mit den Wellengrößen, welche als komplexe Größen grundsätzlich unterstrichen werden !)

Es bedeutet dann z. B. :

a = 0 totale Reflexion, Sieb vollständig dicht.

a = ∞ keine Reflexion, Sieb nicht vorhanden.

Mit den Unitaritätsbeziehungen Gl. (8) folgt dann für die anderen Streumatrix-

elemente der Stoße :

$$\underline{S}_{A_{21}} = \underline{S}_{A_{12}} = \sqrt{1 - e^{-2a_A}} \cdot e^{j(b_A - \pi/2)}$$

$$\underline{S}_{B_{21}} = \underline{S}_{B_{12}} = \sqrt{1 - e^{-2a_B}} \cdot e^{j(b_B - \pi/2)} \qquad (12)$$

Setzt man Gl. (11) und (12) in die Gl. (10) ein, so erhält man

$$\underline{T} = \frac{\sqrt{1 - e^{-2a_A}}\,\sqrt{1 - e^{-2a_B}} \cdot e^{j(b_A + b_B - \pi)} \cdot e^{-(\alpha + j\beta)l}}{1 - e^{-(a_A + a_B)} \cdot e^{j(b_A + b_B)} \cdot e^{-2(\alpha + j\beta)l}}$$

Erweitern des Bruches mit : $e^{+\frac{a_A + a_B}{2} + \alpha l - j\frac{b_A + b_B}{2} + j\beta l}$

liefert :

$$\underline{T} = \frac{\sqrt{e^{a_A} - e^{-a_A}} \cdot \sqrt{e^{a_B} - e^{-a_B}} \cdot e^{j\left(\frac{b_A}{2} + \frac{b_B}{2} - \pi\right)}}{e^{\left\{\frac{a_A}{2} + \frac{a_B}{2} + \alpha l + j\left(\beta l - \frac{b_A}{2} - \frac{b_B}{2}\right)\right\}} - e^{-\left\{\frac{a_A}{2} + \frac{a_B}{2} + \alpha l + j\left(\beta l - \frac{b_A}{2} - \frac{b_B}{2}\right)\right\}}}$$

$$\underline{T} = \frac{e^{j\left(\frac{b_A}{2} + \frac{b_B}{2} - \pi\right)} \cdot \sqrt{\sinh(a_A) \cdot \sinh(a_B)}}{\sinh\left\{\alpha l + \frac{a_A + a_B}{2} + j\left(\beta l - \frac{b_A + b_B}{2}\right)\right\}} \qquad (13)$$

Bemerkenswert ist in dieser Formel die Symmetrie hinsichtlich der Reflexionsstelle A und B . Bis auf einen konstanten Amplitudenfaktor lässt sich ein Leitungsresonator, gebildet aus zwei unterschiedlichen Reflexionsstellen (Koppelblenden) A und B im Abstand l innerhalb des Leitungszuges ersetzen durch einen mit gleichen Reflexionsstellen. Dies gilt nur für die Transmission.

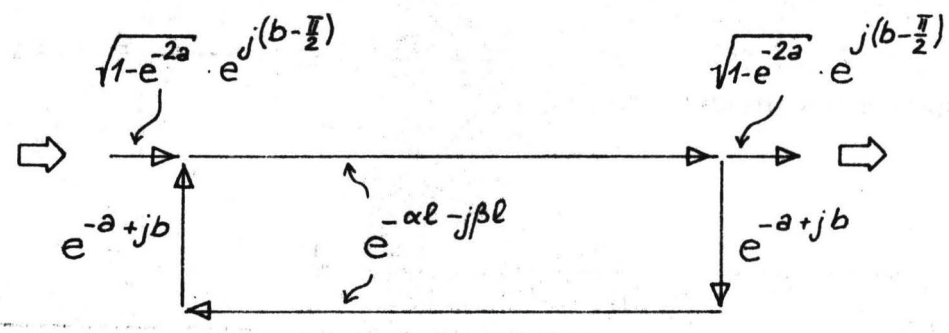
Die Streuparameter der nun gleichen Blenden ergeben sich aus dem geometrischen Mittel der jeweiligen Streuparameter der ursprünglichen Blenden

$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \sqrt{\underline{S}_{A_{11}} \cdot \underline{S}_{B_{11}}}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12} = \sqrt{\underline{S}_{A_{21}} \cdot \underline{S}_{B_{21}}} \qquad (14)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird von nun an der Transmissionsresonator mit symmetrischen Aufbau weiter verfolgt.

Signalflussdiagramm:



Transmission :

$$\underline{T} = \frac{e^{j(b-\pi)} \cdot \sinh(a)}{\sinh\{\alpha l + a + j(\beta l - b)\}} \qquad (15)$$

oder nach Ersetzen des Hyperbelsinus durch den trigonometrischen Sinus :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j(b+\pi/2)} \cdot \sinh a}{\sin\{\beta l - b - j(\alpha l + a)\}}} \qquad (16)$$

1.1 Kurvendarstellung zum Übertragungsverhalten des einfachen Leitungsresonators

Hierfür wird noch vereinfacht :

Die Leitung sei verlustlos : $\alpha = 0$. Verluste des Resonators nur infolge der Durchlässigkeit der (verlustlosen) Blenden. Das Maximum der Transmission ist daher stets = 1 .

Lauf - Parameter der Ortskurven ist βl . Sowohl die Länge als auch die Frequenz können variiert werden, da beide nur im Produkt auftreten.

Der Phasensprung b bei Reflexion der Welle an einer Blende bewirkt nur eine Verschiebung des Anfangspunktes und eine Drehung der Ortskurve . Hier wird $b = \pi$ gesetzt. Mit Gl. (9) bedeutet das : Phasensprung der Welle um 180° bei Reflexion an einer Blende.

Dargestellt werden : Ortskurven der reziproken Transmission, Ortskurven der Transmission, Verlauf des Betrages der Transmission über βl jeweils für verschiedene Werte der " Durchlässigkeit " (Reflexionsdämpfung a) der Blenden.

<u>Die Ortskurven der reziproken Transmission</u>

Mit Gl. (16) und den Annahmen oben erhält man :

$$\frac{1}{\underline{T}} = e^{-j\frac{3}{2}\pi} \cdot \frac{\sin[\beta l - \pi - j\alpha]}{\sinh a}$$

$$= \frac{j}{\sinh a} \cdot \left\{ \sin(\beta l - \pi) \cdot \cosh(-a) + j\cos(\beta l - \pi) \cdot \sinh(-a) \right\}$$

$$= j\left\{ \coth a \cdot \sin(\beta l - \pi) - j\cos(\beta l - \pi) \right\}$$

$$\boxed{\frac{1}{\underline{T}} = -\left\{ \cos\beta l + j\coth\alpha \cdot \sin\beta l \right\}} \qquad (16\,a)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse in der komplexen Ebene mit der kleinen Halbachse 1 und der großen Halbachse $j \cdot \coth a$.
Von einem Kreis für ein Leitungsstück ohne Blenden ausgehend streckt sie sich immer mehr für kleiner werdende " Durchlässigkeit " der Blenden.

Die Ortskurven der Transmission

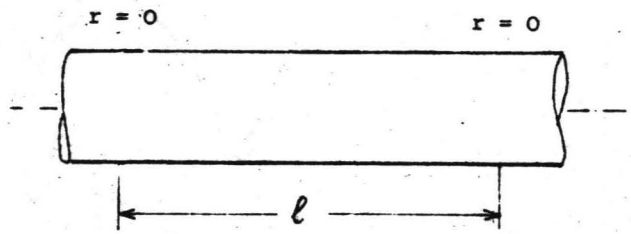
entstehen durch Inversion der vorigen. Ebenfalls von einem Kreis ausgehend bildet sich eine Einschnürung (Hantelform). Für hohe Güten entstehen zwei Fast - Kreise (liegende Acht) .

Der Verlauf der Beträge der Transmissionen

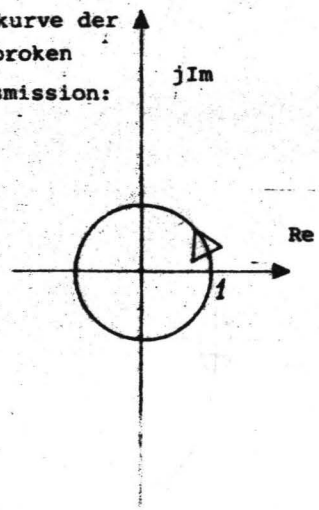
ist am einfachsten zu messen. Bei kleinen Reflexionsfaktoren nur Welligkeit des Übertragungsfaktors. Bei großen Reflexionsfaktoren entstehen die bekannten Resonanz- oder Filterkurven (einkreisiges Filter) . Sie treten periodisch auf.

① Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $\boxed{a = 10}$

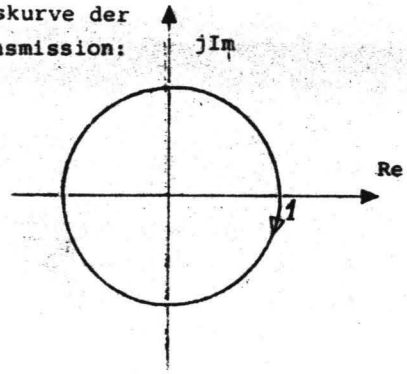
Modell:



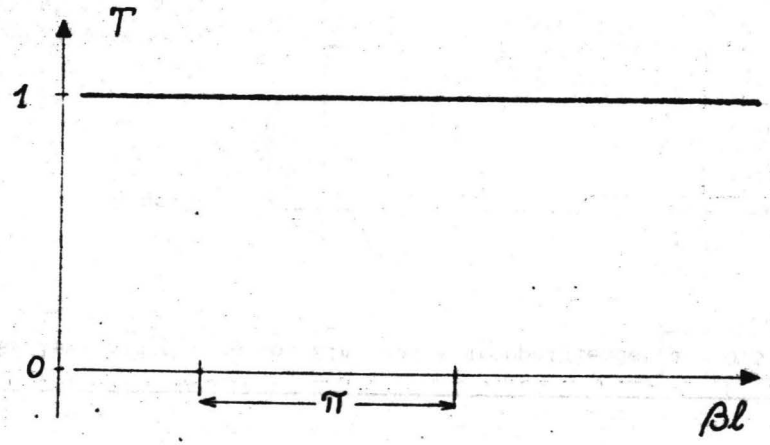
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:

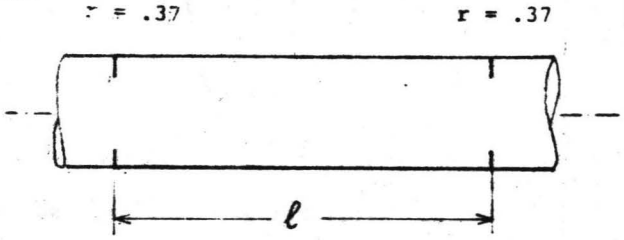


Verlauf des Betrages der Transmission:

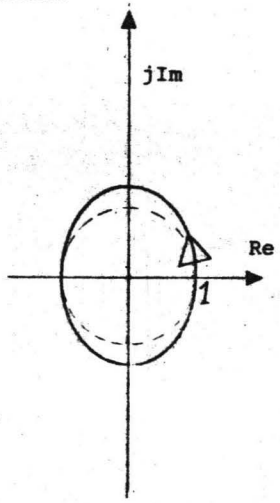


② Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $\boxed{a = 1}$

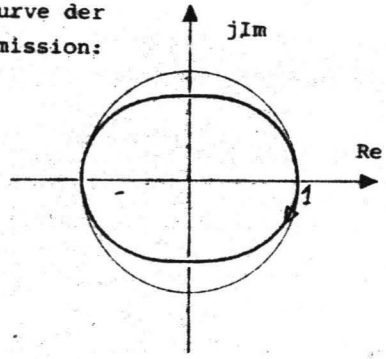
Modell:



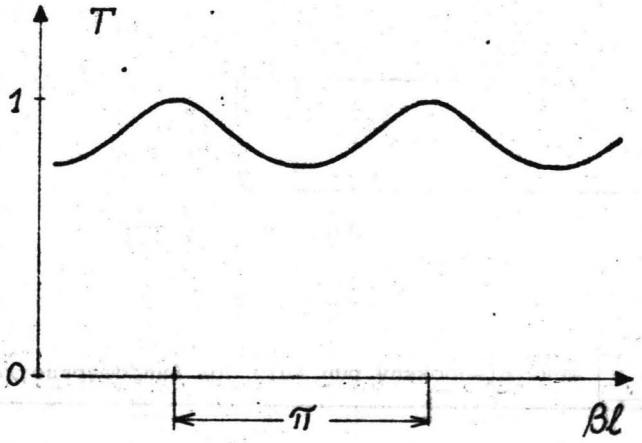
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:



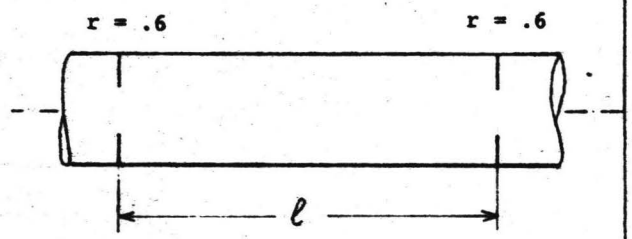
Verlauf des Betrages der Transmission:



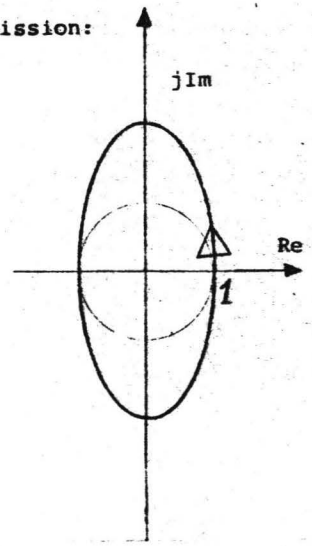
EINFACHER LEITUNGSRESONATOR

③ Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $\boxed{a = 0{,}5}$

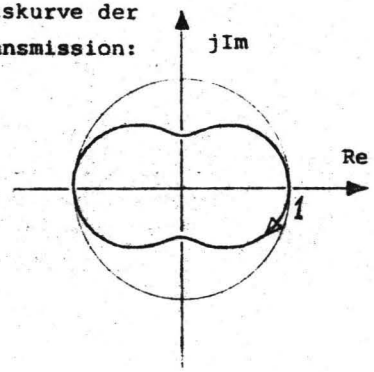
Modell:



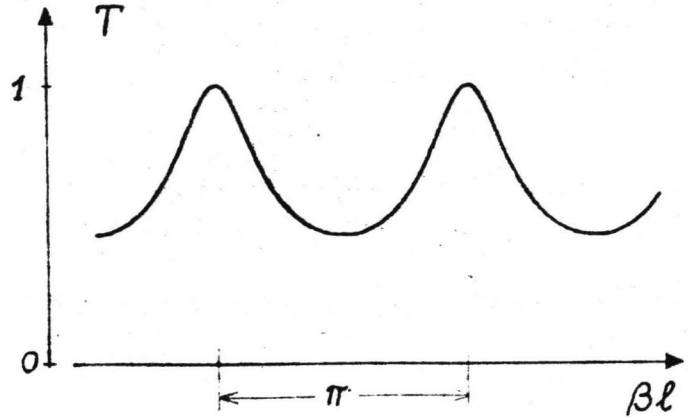
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:

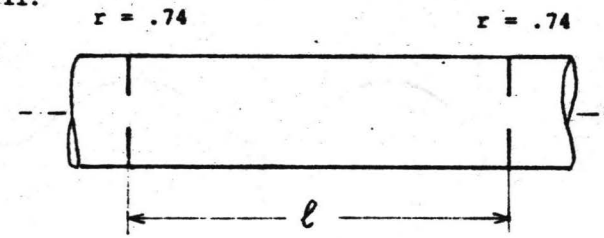


Verlauf des Betrages der Transmission:

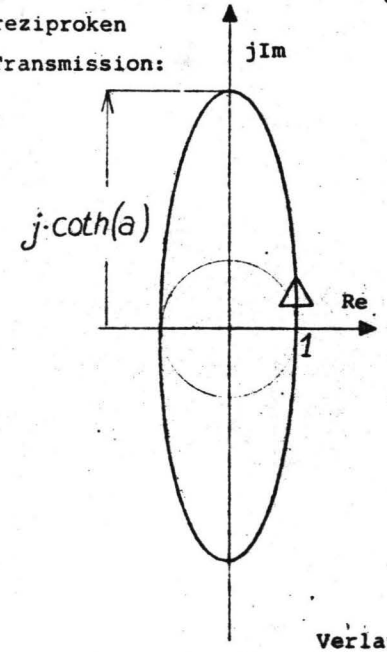


④ Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $\boxed{a = 0{,}3}$

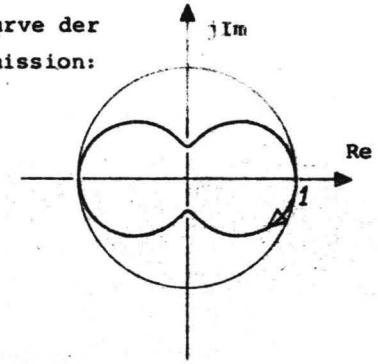
Modell:



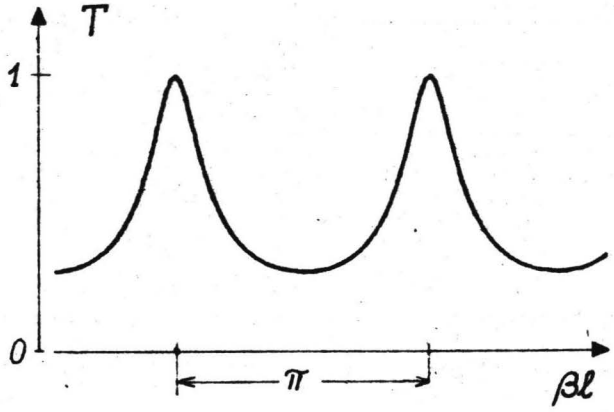
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:

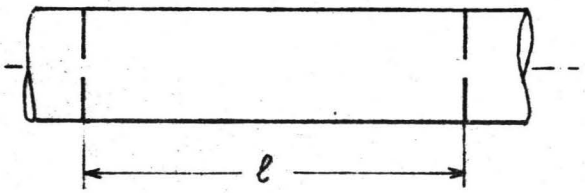


Verlauf des Betrages der Transmission:

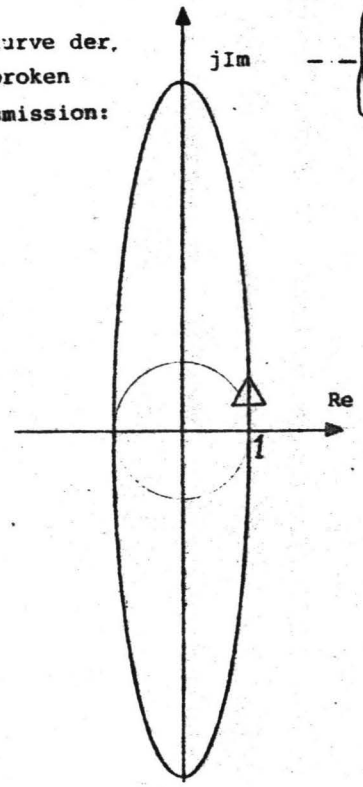


5 Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $a = 0{,}2$

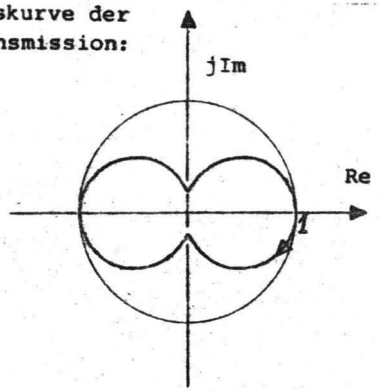
Modell:



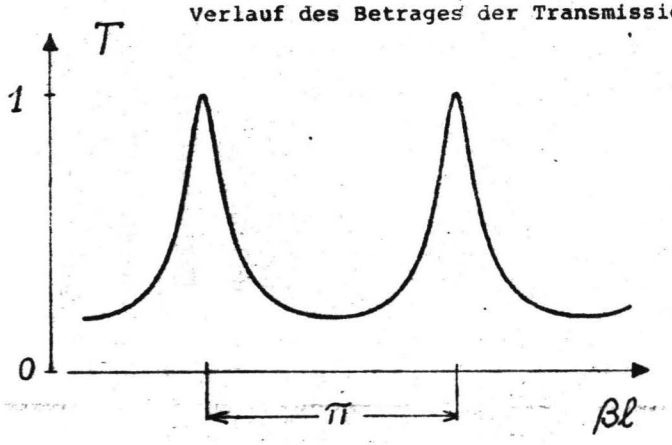
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:

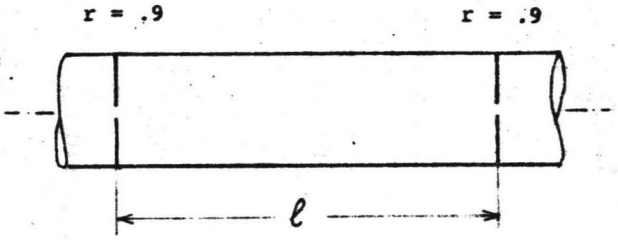


Verlauf des Betrages der Transmission:

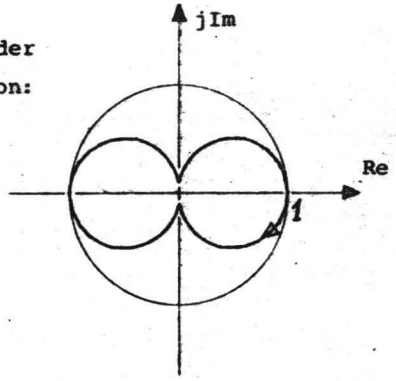


6 Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende $a = 0{,}1$

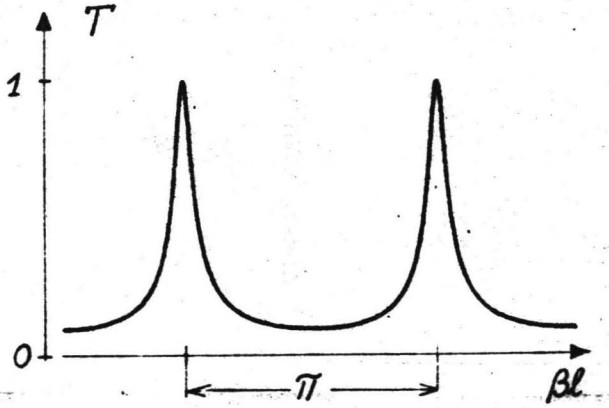
Modell:



Ortskurve der Transmission:



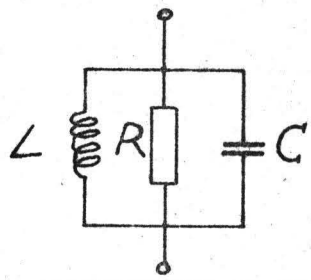
Verlauf des Betrages der Transmission:



1.2 Bandbreite und Güte des einfachen Leitungsresonators

Zur Definition der Bandbreite

Abweichend von einem Parallelschwingkreis aus konzentrierten Elementen,

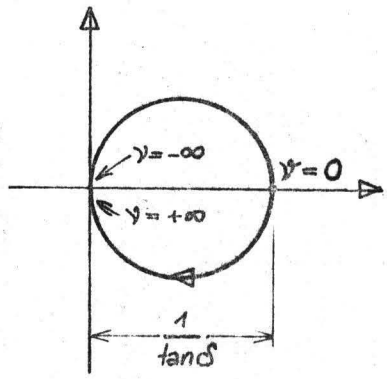


dessen Widerstand in der komplexen Ebene eine Resonanzkurve durchläuft,

$$\frac{\underline{Z}}{Z_K} = \frac{1}{\tan\delta_K + j\nu} \qquad \text{mit } Z_K = \omega_o \cdot L = \frac{1}{\omega_o \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\tan\delta_K = \frac{R}{Z_K}$$

$$\text{Verstimmung } \nu = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$$



welche für $\nu \rightarrow \pm\infty$ betragsmäßig gegen Null geht, behält die Transmission eines Leitungsresonators aufgrund der Hantelform der Ortskurve immer einen endlichen Wert. Zur Definition der Bandbreite wird also sowohl das Maximum als auch das

Minimum der Transmission herangezogen. Wir kehren zurück zu Gl. (16) :

$$\underline{T} = \frac{e^{j(b - \pi/2)} \cdot \sinh a}{\sin\left\{\beta l - b - j\,(\alpha l + a)\right\}}$$

Mit der allgemeinen Beziehung

$$\sin(x + jy) = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \cdot e^{j \arctan\left\{\cot x \cdot \tanh y\right\}} \tag{17}$$

$$= \sin x \cosh y + j \cos x \cdot \sinh y$$

ergibt sich für das Quadrat des Betrages von $\underline{T}$:

$$|\underline{T}|^2 = \frac{\sinh^2 a}{\sin^2(\beta l - b) + \sinh^2(\alpha l + a)} \tag{18}$$

Maximum bei Resonanz : $\sin(\beta l - b) = 0 \rightarrow \beta l - b = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

$$\left|\underline{T}^2_{max}\right| = \frac{\sinh^2 a}{\sinh^2(\alpha l + a)}$$

Minimum im Sperrfall : $\sin^2(\beta l - b) = 1 \rightarrow \beta l - b = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$

$$\left|\underline{T}^2_{min}\right| = \frac{\sinh^2 a}{1 + \sinh^2(\alpha l + a)}$$

Mittelwert der Betragsquadrate :

$$\left|\underline{T}^2_{Mittel}\right| = \frac{1}{2}\left(T^2_{max} + T^2_{min}\right) = \frac{1}{2}\sinh^2 a\left(\frac{1}{\sinh^2(\alpha l + a)} + \frac{1}{1 + \sinh^2(\alpha l + a)}\right)$$

<u>Definition :</u> Die Bandbreite (in Radian) sei nun dasjenige $\Delta\beta l$, um welches βl_N (N-te Resonanz) erhöht (oder erniedrigt) werden muß, um die Transmission vom Maximum $|\underline{T}^2_{Max}|$ auf den Mittelwert $|\underline{T}^2_{Mittel}|$ sinken zu lassen.

$$\left| \underline{T}\,(\beta l_N + \Delta\beta)\right|^2 \overset{!}{=} \left| \underline{T}_{Mittel} \right| \tag{19}$$

also :

$$\frac{\sinh^2 a}{\sin^2 \Delta\beta l + \sinh^2(\alpha l + a)} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\sinh^2 a \left[\frac{1}{\sinh^2(\alpha l + a)} + \frac{1}{1 + \sinh^2(\alpha l + a)}\right]$$

$$\frac{2}{\sin^2 \Delta\beta l + \sinh^2(\alpha l + a)} = \frac{2\sinh^2(\alpha l + a) + 1}{\sinh^2(\alpha l + a)\left[1 + \sinh^2(\alpha l + a)\right]}$$

$$\sin^2 \Delta\beta l + \sinh^2(\alpha l + a) = \frac{2\sinh^2(\alpha l + a) + 2\sinh^4(\alpha l + a)}{2\sinh^2(\alpha l + a) + 1}$$

$$\sin^2 \Delta\beta l = \frac{\sinh^2(\alpha l + a)}{2\sinh^2(\alpha l + a) + 1} = \frac{\sinh^2(\alpha l + a)}{\sinh^2(\alpha l + a) + \cosh^2(\alpha l + a)}$$

$$\sin^2 \Delta\beta l = \frac{\tanh^2(\alpha l + a)}{\tanh^2(\alpha l + a) + 1} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\Delta\beta l = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \arctan x$$

Damit ergibt sich schließlich

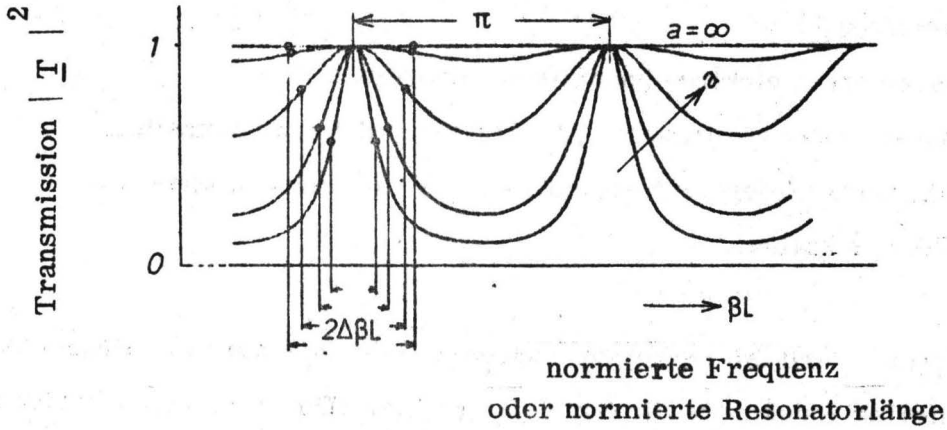
$$\boxed{\Delta\beta l = \arctan\left\{\tanh(\alpha l + a)\right\}} \tag{20}$$

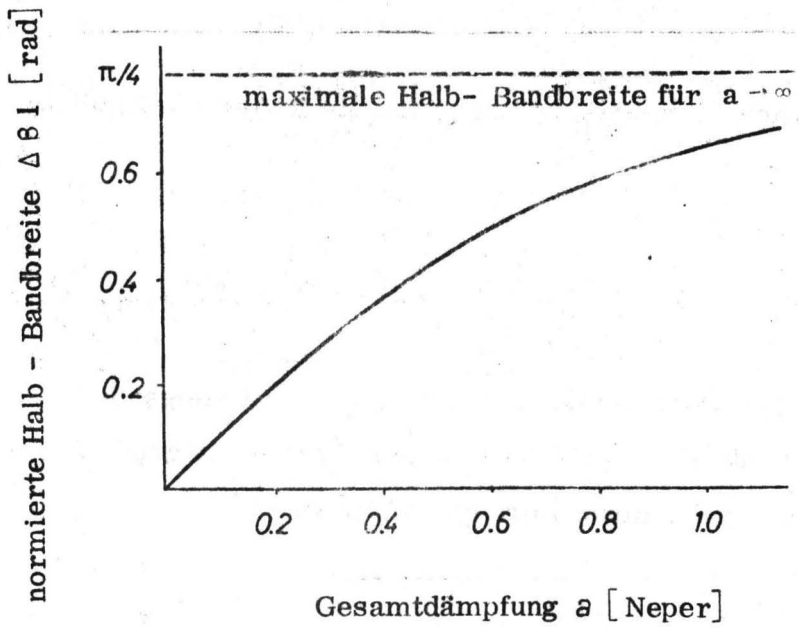
wobei $\Delta\beta l$ in Radian, $(\alpha l + a)$ in Neper zu nehmen ist.

Diese Definition der Bandbreite scheint zunächst sehr willkürlich zu sein. Sie ist aber auf keinen Sonderfall beschränkt sondern gilt für alle, auch sehr große Dämpfungswerte. Setzt man $\Delta\beta l$ nach Gl. (20) in die Transmissionsformel Gl. (16) ein, so erkennt man, daß sich der Zeiger der Transmission (oder der reziproken Transmission) bei Erhöhen von βl um $\Delta\beta l$ gerade um

-45° ($+45^{o}$) aus seiner Resonanzlage gedreht hat. Hier ist eine Übereinstimmung mit der sogenannten 45° - Verstimmung beim einfachen LC - Schwingkreis.

In die folgenden Resonanzkurven sind die Bandbreiten für wachsende Reflexionsdämpfung a qualitativ eingezeichnet ($\alpha l = 0$ angenommen) . Darunter das Diagramm entsprechend Gl. (20) .





Wichtig ist der Fall geringer Dämpfung (hohe Güte) .

Für $(\alpha l + a) \ll 1$ folgt aus Gl. (20) :

$$\boxed{\Delta\beta l \approx \alpha l + a} \qquad (20\,a)$$

<u>Die Güte des einfachen Leitungsresonators</u>

Nach [4] ist die Güte oder der Gütefaktor eines Hohlraumresonator gegeben durch :

$$Q = \frac{\omega \cdot W}{P} \qquad (21)$$

ω = Kreisfrequenz

W = gespeicherte elektro-magnetische Energie

P = im Resonator verbrauchte Wirkleistung, d.h. die Leistung, die ständig nachgeliefert werden muß, um W auf seinen konstanten Wert zu halten.

Ohne Ableitung wird die Beziehung zwischen Güte, normierter Frequenz und normierter Bandbreite für den Fall geringer Dämpfung angeschrieben:

$$Q = \frac{\beta l}{2\,\Delta\beta l} \approx \frac{\beta l}{2\,(\alpha l + a)} \qquad (21\,a)$$

Für Überwiegen der Leitungsdämpfung gegen die Reflexionsdämpfung ($\alpha l \gg a$))

$$\boxed{Q = \frac{\beta}{2\,\alpha}} \qquad (21\,b)$$

Unabhängig von der Resonatorlänge l . Steigt α mit steigender Frequenz weniger als β , so ist die Güte umso höher, je größer die Betriebsfrequenz des Resonators gewählt wird !

Zusammenhang von " Bandbreite in Radian" mit " Bandbreite in Hertz "

Wir ändern βl durch Verändern der Frequenz f und halten die Länge l konstant. Dann gilt für :

TEM - Wellen :

$$\beta = k = \frac{\omega}{c}$$

$c = 2,99798 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$\Delta\beta l = \frac{2\pi \Delta f \cdot l}{c} \approx \alpha l + a \qquad \text{mit} \quad (20a)$$

$$\boxed{\Delta f \approx \frac{c}{2\pi} \left(\alpha + \frac{a}{l}\right)} \qquad (22)$$

Hohlleiterwellen :

$$\beta^2 = k^2 - q^2$$

q = Eigenwert des jeweiligen Wellentyps

$$2\beta \cdot \delta\beta = 2k \cdot \delta k$$

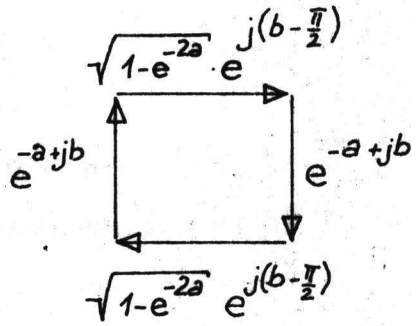
$$\Delta k \cdot l = \frac{\beta}{k} \cdot \Delta\beta l \approx \sqrt{2 - (q/k)^2} \cdot (\alpha l + a)$$

$$\boxed{\Delta f \approx \frac{c}{2\pi} \sqrt{1 - (q/k)^2} \cdot \left(\alpha + \frac{a}{l}\right)} \qquad (23)$$

Das Beschalten einer Leitung als Resonator (Leitungsresonator) erlaubt die Messung des Dämpfungsbelages α über eine Bandbreitenmessung. Störend ist die (meist unbekannte) Reflexionsdämpfung an den Ein - und Auskoppelblenden. Sie liefert einen additiven Beitrag zur Bandbreite. Abhilfe : den Resonator hinreichend lang machen, so daß die Leitungsdämpfung überwiegt ($\alpha l \gg a$) oder Elimination von a durch Messungen bei zwei verschiedenen Längen l_1 und l_2 .

1.3 Einige Überlegungen zum Reflexionsfaktor von Ein- und Auskoppelblende

Fasst man eine Blende als verlustloses Zweitor auf, so war mit unseren Bezeichnungen das Signalflußdiagramm :

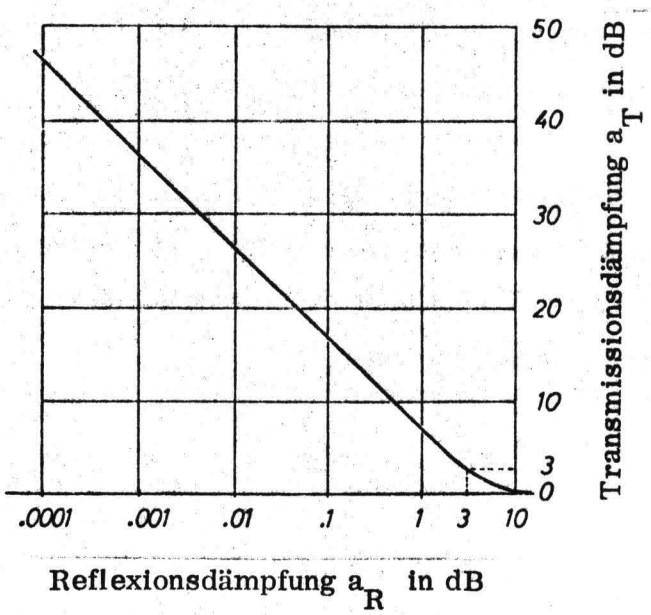


Wir bezeichnen die Reflexionsdämpfung a zur Unterscheidung mit a_R und führen für den Längspfad eine Transmissionsdämpfung a_T ein :

$$e^{-a_T} = \sqrt{1 - e^{-2\,a_R}}$$

$$\boxed{a_T = -\frac{1}{2}\ln\left[1 - e^{2a_R}\right]} \qquad (24)$$

Das folgende Diagramm zeigt diesen für jedes verlustlose Zweitor geltenden Zusammenhang :



1.31 Einfluß der endlichen Leitfähigkeit auf die Reflexionsdämpfung

$a_R = 0$ würde totale Reflexion der Wellengrößen an den Ein - und Auskoppelblenden bedeuten ($|\underline{r}| = 1$).

Bei Verwendung der H_{01} - Welle in der Kreishohlleitertechnik z. B. führt man solche Blenden als Viellochblenden (Siebe) aus.

$|\underline{r}| = 1$ hieße dann : Leitfähigkeit $\sigma = \infty$, Durchmesser eines jeden Loches = 0 .

Es ist aber nicht sinnvoll, den Lochdurchmesser unter einen bestimmten Wert zu verkleinern, weil infolge des endlichen σ stets eine Rest - Reflexionsdämpfung $a_{R\sigma}$ bleibt.

Ohne auf eine genauere Untersuchung einzugehen, soll als Anhaltswert der Reflexionsfaktor benutzt werden, den man beim senkrechten Einfall einer ebenen Welle auf eine metallische dicke Wand erhält [4] :

mit $Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ Wellenwiderstand in verlustlosen Dielektrikum

$\underline{Z}_\sigma = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$ Wellenwiderstand im Metall

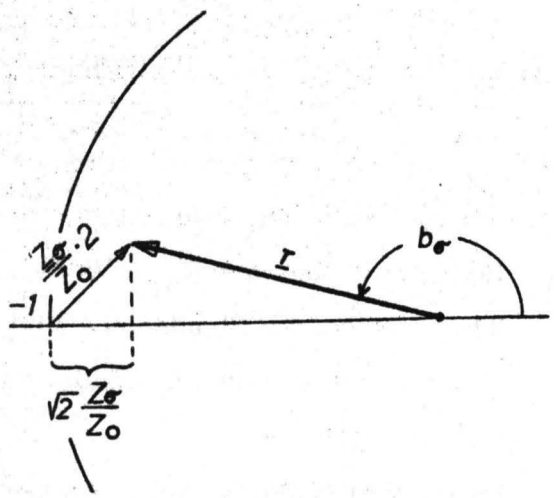
wird $$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_\sigma / Z_o - 1}{\underline{Z}_\sigma / Z_o + 1} \quad ; \quad \frac{\underline{Z}_\sigma}{Z_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}} \qquad (25)$$

Bei technischen Frequenzen und fast allen Metallen gilt:

$\frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \gg 1$. Wir befinden uns in der komplexen Reflexionsfaktorebene in der Umgebung des Punktes - 1

$$\underline{r} \approx \left(\underline{Z}_\sigma / Z_o - 1\right)\left(1 - \underline{Z}_\sigma / Z_o\right)$$

$$\underline{r} \approx -1 + 2\sqrt{j\frac{\omega\epsilon}{\sigma}}$$



Ausschnitt aus der Reflexionsfaktorebene bei metallischer Reflexion

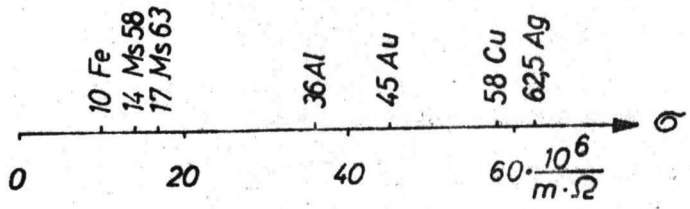
Aus Betrag und Phase von $\underline{r}$ erhält man die Reflexionsdämpfung und den Reflexionswinkel.

$$\underline{r} = e^{-a_{R\sigma} + j\,b_\sigma} \qquad \text{daraus :}$$

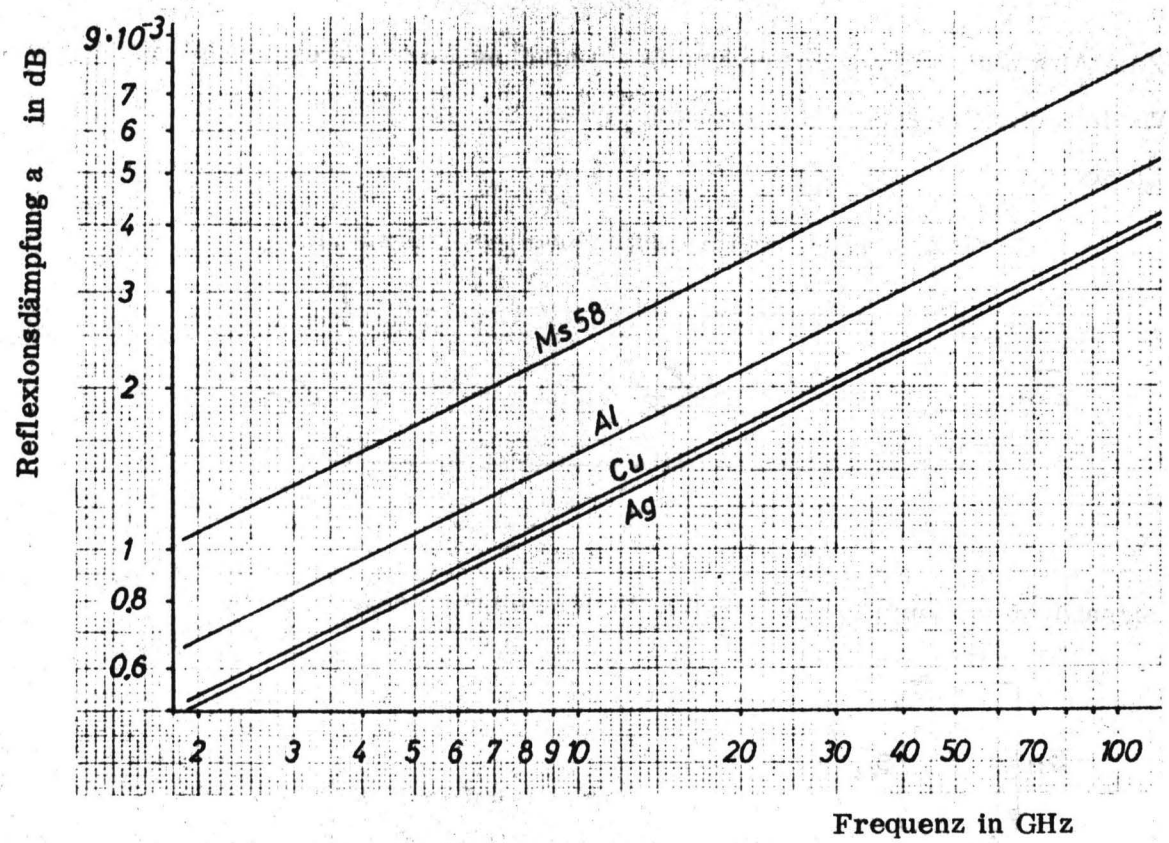
$$a_{R\sigma} \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{\sigma}} \quad [\text{Neper}] \tag{26}$$

$$b_{R\sigma} \approx \pi - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{\sigma}} \quad [\text{Rad}] \tag{27}$$

Mit der Leitfähigkeit σ für einige Metalle



ergibt sich folgendes Diagramm für die Reflexionsdämpfung infolge von Wirbelstromverlusten für den Gigahertzbereich

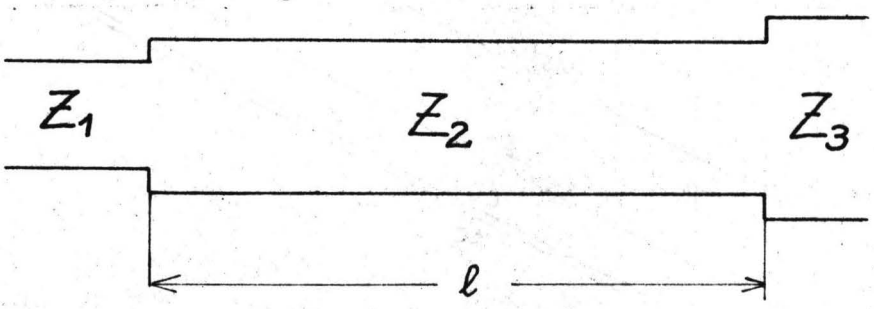

Reflexionsdämpfung a in dB
9·10⁻³
7
6
5
4
3
2
1
0,8
0,6
Ms 58
Al
Cu
Ag
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
70
100
Frequenz in GHz

1.4 Transmission über zwei Wellenwiderstandssprünge

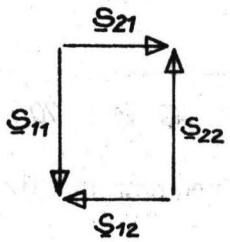
Zum Abschluß soll als Anwendung des einfachen Leitungsresonators der doppelte Wellenwiderstandssprung berechnet werden :

Es sei

$Z_1 < Z_2 < Z_3$ reelle Leitungswellenwiderstände.



Signalflußdiagramm für den ersten Wellenwiderstandssprung A :



mit

$$\underline{S}_{11} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = A \quad (\text{reell})$$

$$\underline{S}_{22} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -A \quad (\text{reell})$$

Mit den Unitaritätsbeziehungen erhält man

$$\underline{S}_{21} = \sqrt{1 - A^2} \cdot e^{j\varphi_A}$$

$$\underline{S}_{12} = \sqrt{1 - A^2} \cdot e^{-j\varphi_A}$$

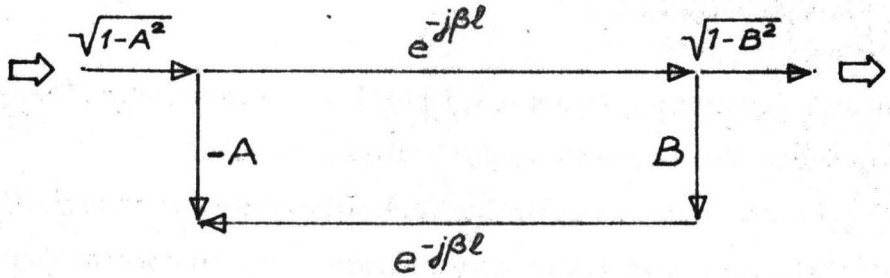
φ_A = beliebige Phase

Die analogen Größen für den zweiten Wellenwiderstandssprung werden mit B abgekürzt.

Für die Kettenschaltung :

Sprung A - Leitung l - Sprung B

ergibt sich das Signalflussdiagramm :



und hieraus mit Gl. (10) die Transmission

$$\underline{T} = e^{j(\varphi_A+\varphi_B)} \cdot \frac{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-B^2}\cdot e^{j\beta l}}{1 + A\cdot B\, e^{-j2\beta l}}$$

Die erste Resonanz liegt bei :

$$\begin{aligned} -2\beta l &= -\pi \\ \rightarrow\ l &= \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4} \end{aligned} \qquad (28)$$

hierbei wird der Betrag der Transmission

$$|\,\underline{T}\,| = \sqrt{\frac{(1-A^2)\,(1-B^2)}{(1-AB)^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{A-B}{1-AB}\right)^2}$$

$|\,\underline{T}\,| = 1$ für $A = B$

d.h.

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} \rightarrow \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_2}$$

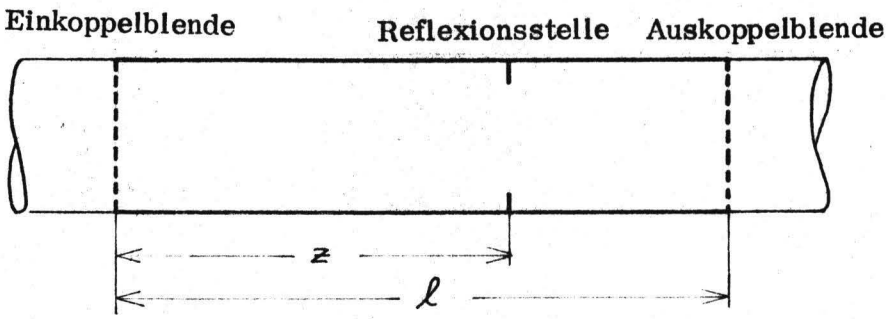
$$Z_2 = \sqrt{Z_1 \cdot Z_3} \qquad (29)$$

Gl. (28) und (29) sind die Dimensionierungsvorschrift für die Anpassung von Leitung Z_3 an Leitung Z_1. Der Resonator ist hier ein $\lambda/4$ - Leitungstransformator.

2 Leitungsresonator mit einer Reflexionsstelle im Inneren

Seriengekoppelte Leitungsresonatoren

Der Leitungsresonator enthalte nun in seinem Inneren eine zusätzliche Blende, von der wir annehmen, daß an ihr keine Störmoden angeregt werden.
Sie soll überdies verlustlos sein (es gelte die Unitaritätsbeziehung) und wird daher allein z. B. durch ihren Reflexionsfaktor $\underline{\rho}$ beschrieben, der alle Werte innerhalb des Einheitskreises annehmen kann. Liegt er hinreichend dicht bei 1, so wird aus dieser Anordnung ein zweistufiger, seriengekoppelter Leitungsresonator.

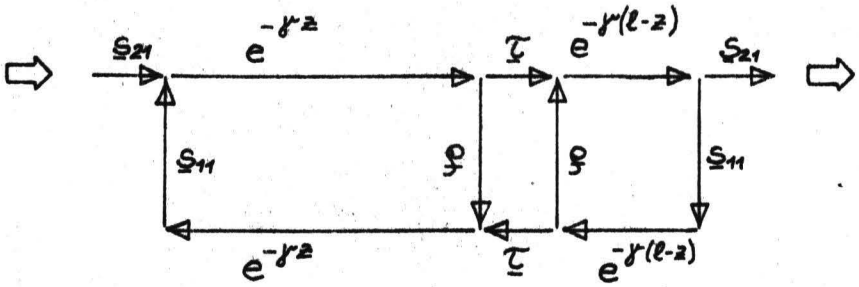


Für die Streumatrix der Reflexionsstelle werden folgende Symbole verwendet :

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho} & \underline{\tau} \\ \underline{\tau} & \underline{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{mit } \underline{\rho} &= \rho \cdot e^{j\varphi_\rho} && \text{Reflexionskoeffizient} \\ \underline{\tau} &= \tau \cdot e^{j\varphi_\rho} && \text{Transmissionskoeffizient} \\ &= \sqrt{1-\rho^2} \cdot e^{j(\varphi_\rho - \pi/2)} \end{aligned}\right\} \text{der Reflexionsstelle} \quad (30)$$

Für die Kettenschaltung :
Einkoppelblende - Leitung - Reflexionsstelle - Leitung (l-z)- Auskoppelblende
hat das Signalflussdiagramm die Gestalt :



wobei

$$\underline{S}_{11} = e^{-a + jb} \qquad \text{Reflexionskoeffizient,} \tag{31}$$

$$\underline{S}_{21} = \sqrt{1-e^{-2a}} \cdot e^{j(b-\pi/2)}$$ Transmissionskoeffizient der Ein- und Auskoppelblenden.

wie früher Gl. (12)

2.0 Einschub : Die Pfad - Schleifen - Regel (Formel von Mason)

nach [3] :

$$\underline{T}_{q,s} = \frac{\sum_{\mu} \underline{P}_{\mu} \left(1 - \sum_{\nu r} \underline{K}^{(1)}_{\nu,r} + \sum_{\nu,r} \underline{K}^{(2)}_{\nu,r} - \dots\right)}{1 - \sum_{\nu} \underline{K}^{(1)}_{\Sigma} + \sum_{\nu} \underline{K}^{(2)}_{\nu} - \dots} \tag{32}$$

mit

$\underline{T}_{q,s}$ = Transmissionsfaktor von s nach q

$\underline{P}_{\mu}$ = Pfad μ von s nach q , d.h. der Weg, der keinen Knoten zweimal durchläuft, bzw. das Produkt der auf dem Weg hintereinanderliegenden $\underline{s}_{\mu\nu}$

$\underline{K}^{(1)}_{\nu}$ = ν-te Schleife 1. Ordnung, d.h. in sich geschlossenener Weg, der keinen Knoten zweimal durchläuft

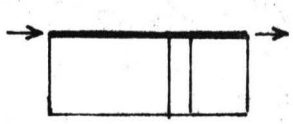
$\underline{K}^{(2)}_{\nu}$ = ν - te Schleife 2. Ordnung, d.h. das Produkt zweier $K^{(1)}_{\nu}$, die keinen gemeinsamen Knoten haben

$\underline{K}^{(n)}_{\nu,r}$ = Schleife n-ter Ordnung, die das $\underline{P}_{\mu}$ vor der Klammer nicht berührt.

Wichtig : Das Ergebnis ist nur richtig, wenn alle $\underline{P}_{\mu}$ und $\underline{K}^{(n)}_{\nu}$ gefunden werden.

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, werden die Pfade mit römisch nummerierten Quadraten, die Schleifen mit Kreisen abgekürzt.

Hier gibt es nur einen Pfad :

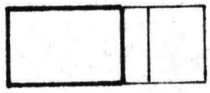


$$\boxed{I} = \underline{S}_{21} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \underline{\tau} \cdot e^{-\gamma(l-z)} \cdot \underline{S}_{21}$$

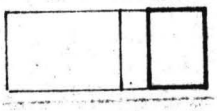
$$= \underline{S}^{2}_{21} \cdot \underline{\tau} \cdot e^{-\gamma l}$$

$$= (1-e^{-2a}) \cdot e^{j2(b-\pi/2)} \cdot \underline{\tau} \cdot e^{-\gamma l}$$

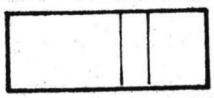
Schleifen 1. Ordnung :



$$\text{I} = \underline{S}_{11} \cdot e^{-2\gamma z} \cdot \underline{\rho}$$



$$\text{II} = \underline{S}_{11} \cdot e^{-2\gamma (1-z)} \cdot \underline{\rho}$$



$$\text{III} = \underline{S}_{11}^2 \cdot \underline{\tau}^2 \cdot e^{-2\gamma l}$$

Schleifen 2. Ordnung :

$$\text{I}\,\text{II} = \underline{S}_{11}^2 \cdot \rho^2 \cdot e^{-2\gamma l}$$

Alle Schleifen berühren den Pfad.

Transmission :

$$\underline{T} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \frac{\boxed{\text{I}}}{1 - \text{I} - \text{II} - \text{III} + \text{I} \cdot \text{II}}$$

Zusammenhang von III **mit** I · II

$$\text{III} = \text{I} \cdot \text{II} \cdot \frac{\underline{\tau}^2}{\underline{\rho}^2} \qquad \text{mit Gl. (30)}$$

$$= \text{I}\,\text{II} \cdot \frac{(1-\rho^2) \cdot e^{j(2\varphi_\rho - \pi)}}{\rho^2 \cdot e^{j2\varphi_\rho}}$$

$$= \text{I}\,\text{II} \cdot \frac{-1}{\rho^2} - (-1) = \text{I}\,\text{II}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck für die Transmission :

$$\underline{T} = \frac{\boxed{\text{I}}}{1 - \text{I} - \text{II} - \underbrace{\text{III}}_{= \text{I} \cdot \text{II} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)} + \text{I}\,\text{II}}$$

$$\underline{T} = \frac{\boxed{\text{I}}}{1 - \text{I} - \text{II} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \text{I}\,\text{II}}$$

$$\text{Nenner} = 1 - S_{11}\, e^{-2\gamma z} . \rho - S_{11}\, e^{-2\gamma (l-z)} . \rho + \frac{1}{\rho^2} S_{11}^2\, e^{-2\gamma l} . \rho^2$$

$$= S_{11} . e^{-\gamma l + j\varphi_\rho} \Big[\underbrace{\frac{1}{S_{11}}\, e^{\gamma l - j\varphi_\rho} + S_{11}\, e^{-\gamma l + j\varphi_\rho}}_{= e^{a - jb + \gamma l - j\varphi_\rho} + e^{-a + jb - \gamma l + j\varphi_\rho}} - \rho \left(e^{-\gamma l + 2\gamma z} + e^{\gamma l - 2\gamma z} \right) \Big]$$

$$\text{Nenner} = e^{-a + jb - \gamma l + j\varphi_\rho} . 2 \left[\cosh (a - jb + \gamma l - j\varphi_\rho) - \rho . \cosh (\gamma l - 2\gamma z) \right]$$

$$\text{Zähler} = (1 - e^{-2a})\, e^{j 2 (b - \pi/2)} . \underline{\tau}\, e^{-\gamma l} = e^{-a + jb - \gamma l + j\varphi_\rho} \underbrace{(e^{a} - e^{-a})}_{= 2 \sinh a} \sqrt{1 - \rho^2} . e^{j (b - \pi - \pi/2)}$$

Damit wird die Transmission :

$$T = \frac{e^{j (b + \pi/2)} \sqrt{1 - \rho^2} . \sinh a}{\cosh \left\{ a - jb + \gamma l - j\varphi_\rho \right\} - \rho \cosh \left\{ \gamma (l - 2 z) \right\}}$$

Um auf eine ähnliche Form zu kommen wie bei der Transmission für den einfachen Leitungsresonator wird der Nenner noch etwas umgeformt :

$$\cosh\left\{ a - jb + \gamma l - j\varphi_\rho \right\} = \cosh j \left\{ \beta l - (\varphi_\rho - \pi/2) - \pi/2 - b - j(\alpha l + a) \right\}$$

mit $\cosh jx = \cos x$ und $\cos(x - \pi/2) = \sin x$

$$= \sin \left\{ \beta l - b - (\varphi_\rho - \pi/2) - j(\alpha l + a) \right\}$$

$$\cosh \left\{ \gamma (l - 2z) \right\} = \cos \left\{ \beta (l - 2z) - j\alpha (l - 2z) \right\}$$

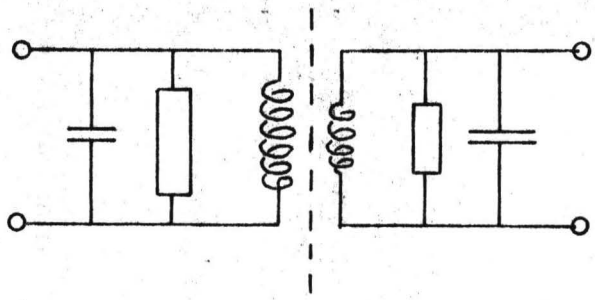
Damit (33)

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j(b + \pi/2)} \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \sinh a}{\sin\left\{ \beta l - b - (\varphi_\rho - \pi/2) - j(\alpha l + a) \right\} - \rho \cos \left\{ \beta (l - 2z) - j\alpha (l - 2z) \right\}}}$$

Kontrolle : keine Blende an der Stelle z vorhanden : $|\rho| = 0$,

$\varphi_\tau = 0 \rightarrow \varphi_\rho = \pi/2$. Gl. (33) wird dann identisch mit (16) !

Als Ersatzschaltbild für diesen zweistufigen Leitungsresonator können zwei seriengekoppelte LC - Schwingkreise dienen. Es gilt aber nur für eine einzige Resonanzfrequenz. Die fürLeitungsresonatoren typische Periodizität wird damit nicht erfaßt.



2.1 Kurvendarstellungen zum Resonator mit einer Reflexionsstelle im Innern

Auch hier werden einige Annahmen gemacht :

1.) $\alpha = 0$, die Bedämpfung des Resonators erfolgt nur durch a .

2.) $z = l/2$, die Reflexionsstelle liege in der Mitte. Auf den Einfluß auf die Resonanzkurven bei Verschieben der Blende aus der Mitte heraus wird in der Diskussion eingegangen.

3.) $\varphi_\rho = \pi/2$, hiermit wird der Startpunkt beim Durchlaufen der Ortskurve festgelegt.

4.) $b = \pi$ wie bei ideal metallischer Reflexion

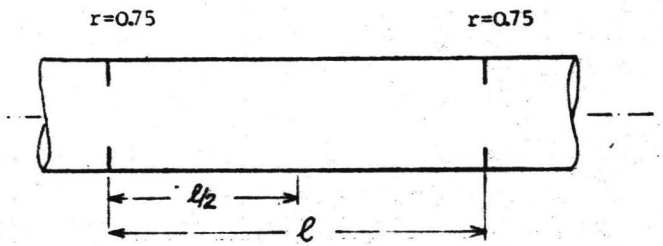
Aus (33) wird dann:

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j\,3/2\,\pi}\sqrt{1-\rho^2}\,.\,\sinh a}{\sin\left\{\beta l - \pi - j\,a\right\} - \rho}} \qquad (33\,a)$$

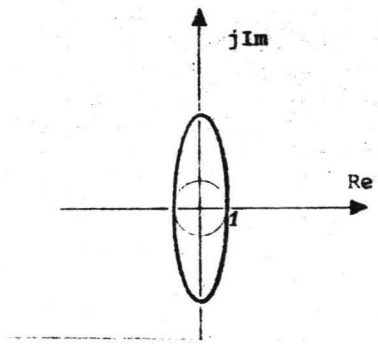
Für die folgenden Kurven mit verschiedenen Parametern ρ wurde $a = 0,3$ [Neper] eingesetzt.

1 Reflexionsfaktor der Koppelblende $\boxed{\varrho = 0}$

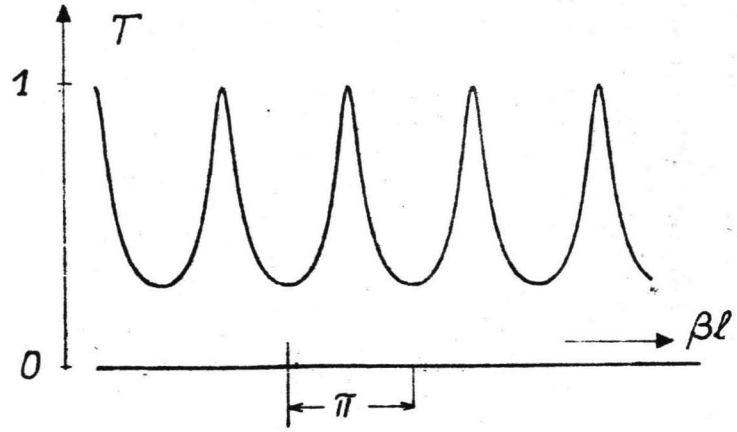
Modell:



Ortskurve der reziproken Transmission:

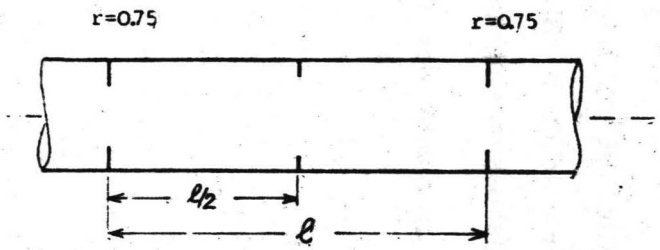


Verlauf des Betrages der Transmission:

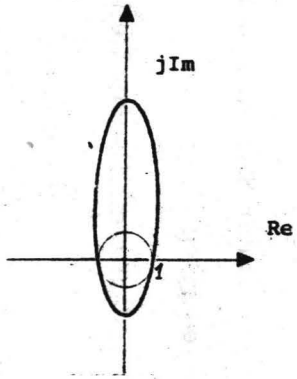


2 Reflexionsfaktor der Koppelblende $\boxed{\varrho = 0{,}5}$ (stark überkritische Ankopplung)

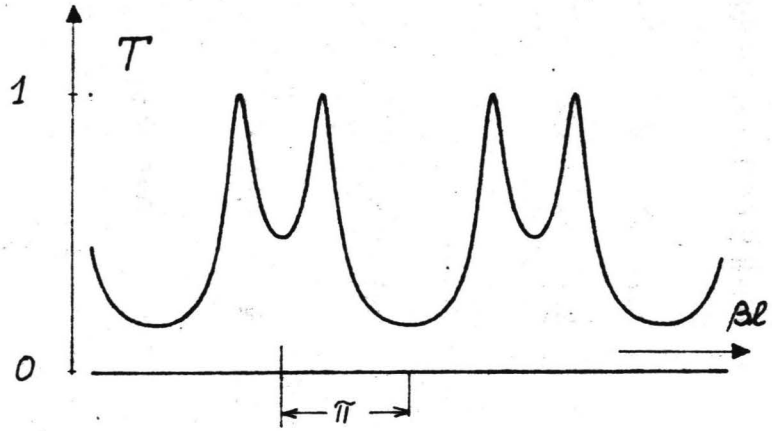
Modell:



Ortskurve der reziproken Transmission:

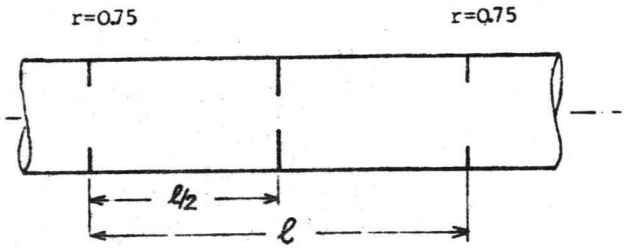


Verlauf des Betrages der Transmission:

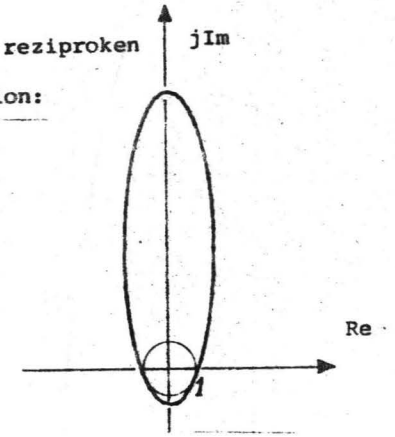


③ Reflexionsfaktor der Koppelblende $\rho = 0{,}9$ (überkritische Ankopplung)

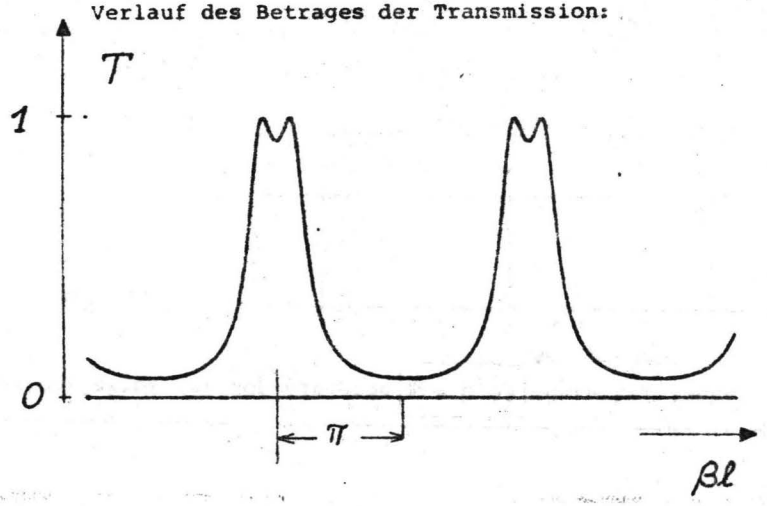
Modell:



Ortskurve der reziproken Transmission:

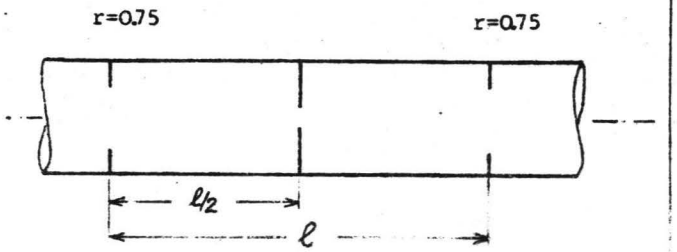


Verlauf des Betrages der Transmission:

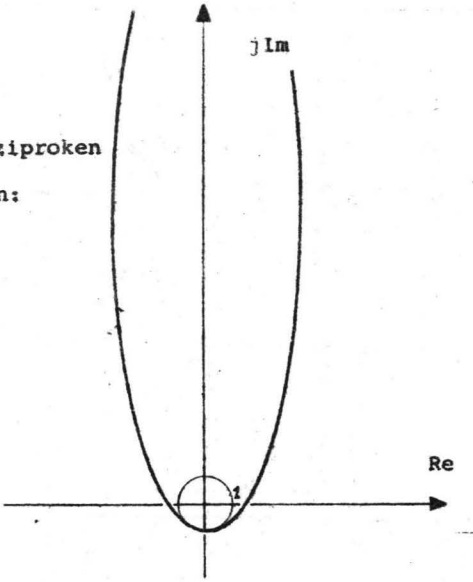


④ Reflexionsfaktor der Koppelblende $\rho = 0{,}9566$ (kritische Kopplung)

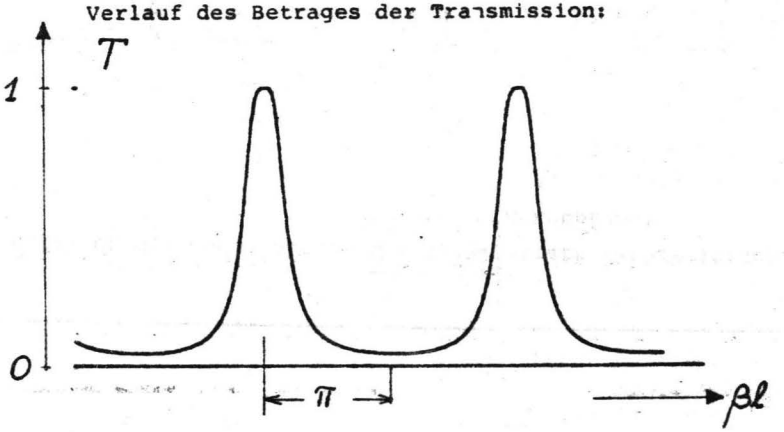
Modell:



Ortskurve der reziproken Transmission:

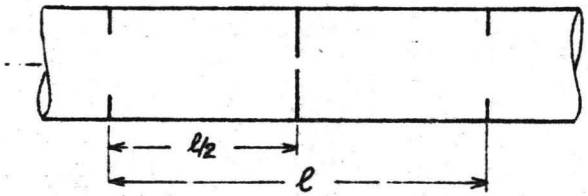


Verlauf des Betrages der Transmission:

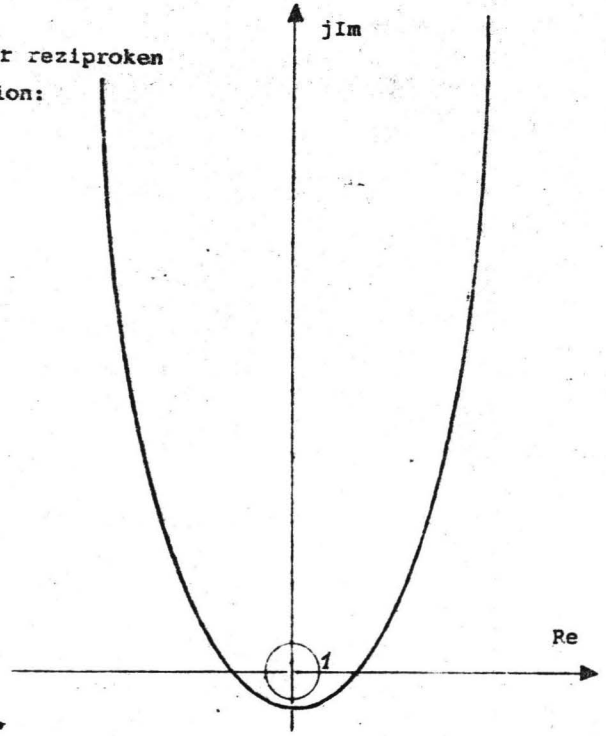


5 Reflexionsfaktor der Koppelblende $\rho = 0{,}99$ (unterkritische Ankopplung)

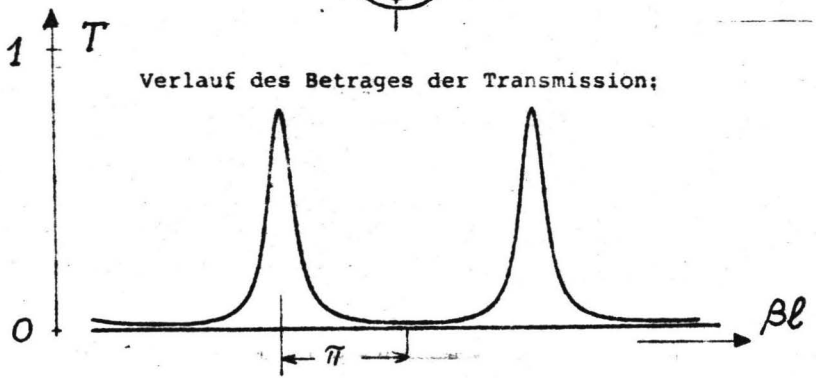
Modell:



Ortskurve der reziproken Transmission:

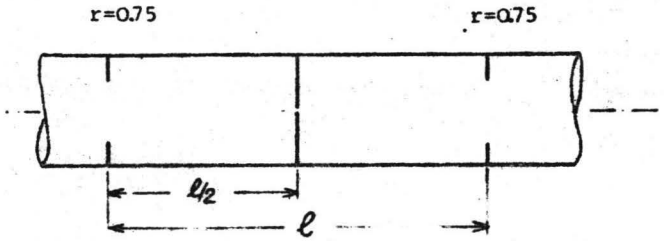


Verlauf des Betrages der Transmission:

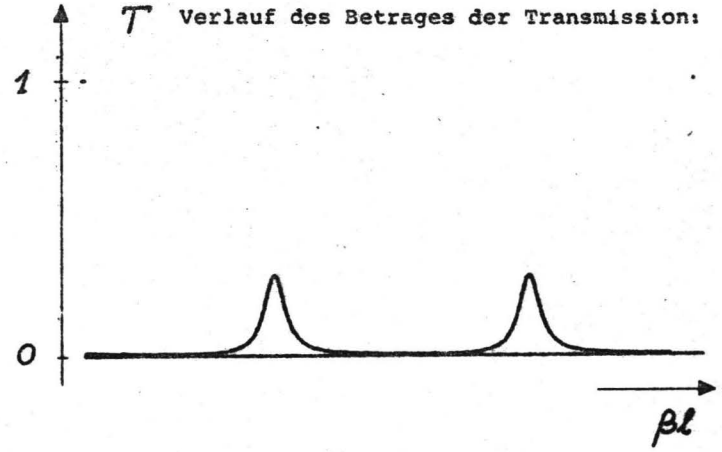


6 Reflexionsfaktor der Koppelblende $\rho = 0{,}999$ (stark unterkritische Ankopplung)

Modell:



Verlauf des Betrages der Transmission:

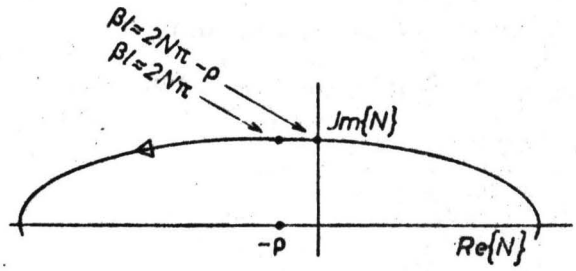


2.11 Diskussion der Kurven zu den seriengekoppelten Leitungsresonatoren

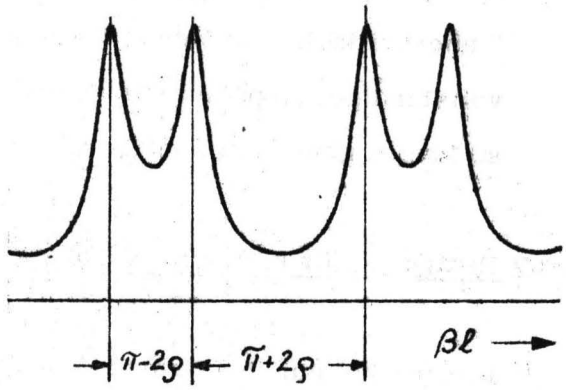
Die Bilder zeigen nacheinander das Resonanzverhalten bei wachsendem Reflexionsfaktor . Bei $\rho = 0$ ist noch keine Störung der Ortskurve vorhanden: es ist dieselbe Ellipse wie für den einfachen Resonator mit $a = 0.3$.

Bei kleinen Reflexionsfaktoren ($\rho = 0.5$) verschiebt sich die Ellipse um ρ aus ihrer ursprünglichen Lage. Die Resonanzkurven streben paarweise zusammen. Diese Resonanzverschiebung ist ein direktes Maß für den Reflexionsfaktor und kann zu seiner Messung dienen :

Bei hinreichend kleinem a kann man die Ellipse in Resonanznähe linearisieren :



Durchlaßkurve :



Besteht zwischen βl und der Frequenz f ein linearer Zusammenhang, ist δf_o der Resonanzfrequenzabstand bei ungestörtem, $\delta f_{stör}$ der bei vorhandener Reflexionsstelle, so ist die relative Resonanzfrequenzverschiebung :

$$\boxed{\frac{\delta f_{stör} - \delta f_o}{\delta f_o} \approx \pm \frac{2\rho}{\pi}} \qquad (34)$$

ein direktes Maß für den Reflexionsfaktor.

Wird der Reflexionsfaktor größer, so wachsen je zwei Resonanzen zusammen und bilden eine einzige, allerdings mit steileren Flanken. Oberhalb eines gewissen Wertes sinkt der maximale Übertragungsfaktor und geht für $\rho = 1$ auf Null.

Vertrauter sind die Bilder, wenn man sie in umgekehrter Reihenfolge betrachtet : Es sind Resonanzkurven zweier gleicher, seriengekoppelter Leitungsresonatoren . Die " Durchlässigkeit " $\tau = \sqrt{1 - \rho^2}$ ist nun der " Koppelfaktor " kleine Durchlässigkeit = lose Kopplung = unterkritische Kopplung.

Die sogenannte " normierte Parabel " für zwei gekoppelte LC - Schwingkreise ist hier - Leitungsresonatoren haben periodische Resonanzkurven - die aus ihrer Mittellage verschobene Ellipse.

Bei " kritischer Kopplung " beginnt eine Einsattlung der Resonanzkurve , bei " überkritischer Kopplung " wandern die beiden Höcker auseinander, bis bei vollständiger Kopplung die beiden Resonatoren zu einem einzigen , nun doppelt so langen geworden sind.

2.12 Bedingung für kritische Kopplung

Hierfür ist nur der Nenner der Transmissionsgleichung (33 a) verantwortlich.

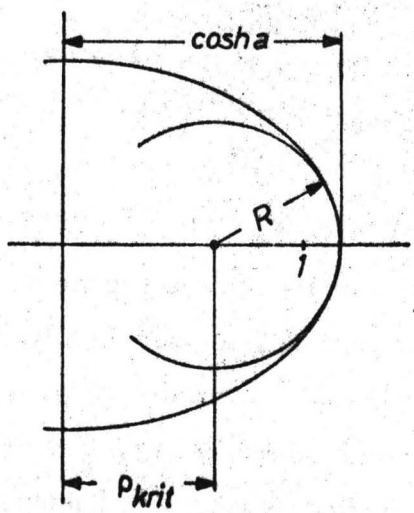
Die Ellipse :

$$\sin (\beta l - ja) \qquad \text{für } a = \text{constant}$$

hat für $\beta l = \pi/2$ (Scheitel)

den Krümmungsradius : $R = \dfrac{\sinh^2 a}{\cosh a}$

Kritische Kopplung liegt also dann vor, wenn



(35)

$$\rho = \rho_{Krit} = \cosh a - R = \cosh a - \frac{\sinh^2 a}{\cosh a} = \frac{1}{\cosh a}$$

für a = 0, 3 :

$$\rho_{Krit} = \frac{1}{\cosh 0,3} = 0.9566 .$$ Dem entspricht eine Reflexionsdämpfung

von - ln 0, 9566 = 0.0444 Neper.

Die mittlere Blende braucht also nur weniger transparent zu sein als Ein- und Auskoppelblende um " kritische Kopplung " hervorzurufen.

2.2 Resonanzkurven bei außermittiger Lage der Reflexionsstelle

Mit dem Nenner von Gl. (33) ergibt sich folgender Unterschied :

Der Mittelpunkt der durch den " sin " gegebenen Resonanzellipse ist nicht konstant um ρ aus dem Nullpunkt verschoben, sondern beschreibt entsprechend $\rho \cdot \cos \left\{ \beta (1 - 2z) - j\alpha (1 - 2z) \right\}$ ebenfalls eine Ellipse um den Koordinatenursprung. So entstehen (bei überkritischer Verkopplung) sich ständig ändernde Höckerhöhen in den paarweise zusammengehörenden Resonanzkurven : die beiden Teil- Resonatoren sind jeweils unterschiedlich gegeneinander verstimmt.

3 Leitungsresonator mit zwei Wellentypen, die durch eine Störstelle miteinander gekoppelt sind.

Parallelgekoppelte Leitungsresonatoren.

3.0 Vorbetrachtungen

Für den Transport elektromagnetischer Energie im Gigahertz - Bereich durch elektrische Leitungen über große Entfernungen eignen sich Wellentypen, die nur schwach gedämpft werden, d.h. ein kleines α haben. Es sind prinzipiell Wellentypen deren Strahlungswirkleistungsdichte über den Querschnitt so verteilt ist, daß der Hauptanteil durch verlustloses Dielektrikum (z.B. Vakuum) und möglichst wenig entlang der verlustbehafteten Leiterkontur und durch verlustbehaftetes Dielektrikum geführt wird.

Es ist dies z.B. die

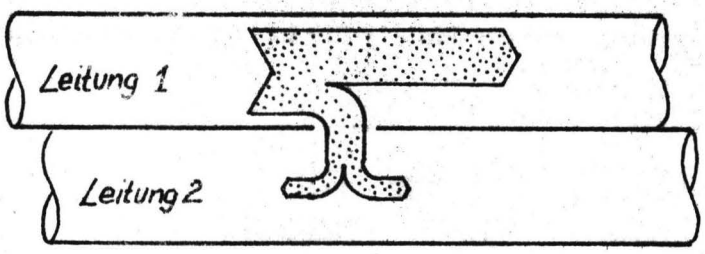
H_{01} - Welle (TE_{01} - Welle) im Kreishohlleiter.

Gleichzeitig mit der H_{01} - Welle sind aber auch andere Wellentypen ausbreitungsfähig.
Sie sind hier unerwünscht und werden als Störwellen oder Störmoden bezeichnet.

Die Umwandlung eines Teiles der Haupttyp-Strahlungsleistung in Strahlungsleistung eines Störtyps wird als Störwellenanregung bezeichnet, der Ort der Anregung als Störstelle. Störwellenanregung liegt insbesondere bei Verformung der Querschnittsgeometrie vor.

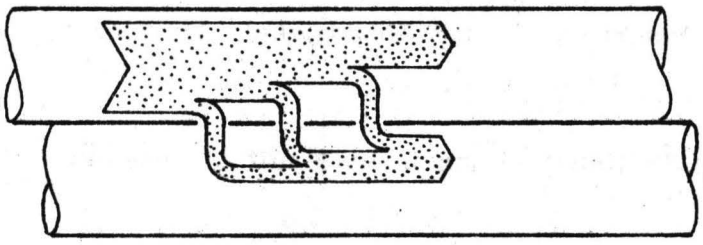
Da sich im idealen Hohlleiter alle Wellentypen linear überlagern und nur an den Störstellen in Energieaustausch (ebenfalls linear) miteinander treten können, ist es ohne weiteres möglich, jedem Wellentyp eine eigene Leitung zugeordnet zu denken und nur an den Störstellen Brücken zwischen den Leitungen anzunehmen.

Als Modell sollen zwei Hohlleiter dienen mit einem Loch in der gemeinsamen Wand:



Ein Teil der in Leitung 1 (Hauptwellentyp) in + z-Richtung laufenden Welle koppelt durch das Loch in Leitung 2 und teilt sich in eine vor- und rücklaufende Welle des Wellentyps 2 (Störwellentyp) auf.

Eine Anordnung mit mehreren Löchern unterdrückt die rücklaufende Welle:



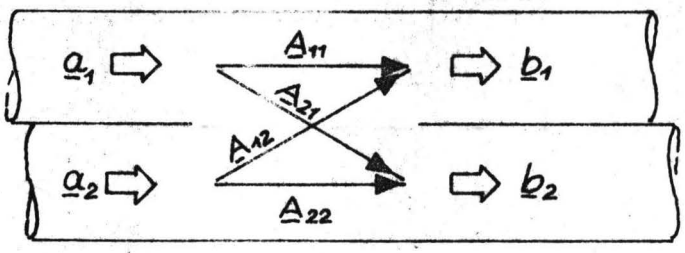
Prinzip eines Interferenz - Richtkopplers.

3.1 Die Matrix der Störstelle

Wir machen die Voraussetzung, daß sich unsere Störstelle verhält wie ein idealer Viellochkoppler :

1. Wellen des Wellentyps 1 regen nur Wellen vom Wellentyp 2 an, die in dieselbe Richtung laufen.
   Keine " Rückwärtsanregung ".
2. Die Störstelle ist reflexionsfrei für beide Wellentypen.

Das Signalflussdiagramm und die Matrix für in + z -Richtung laufende Wellen :



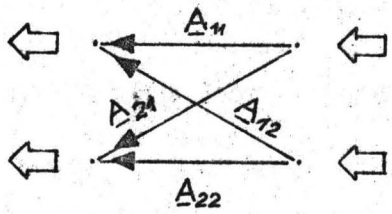
$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Diese Matrix ist keine Streumatrix ! Die Indizes beziehen sich nicht auf die Bezugsebenen, sondern auf die Wellentypen.

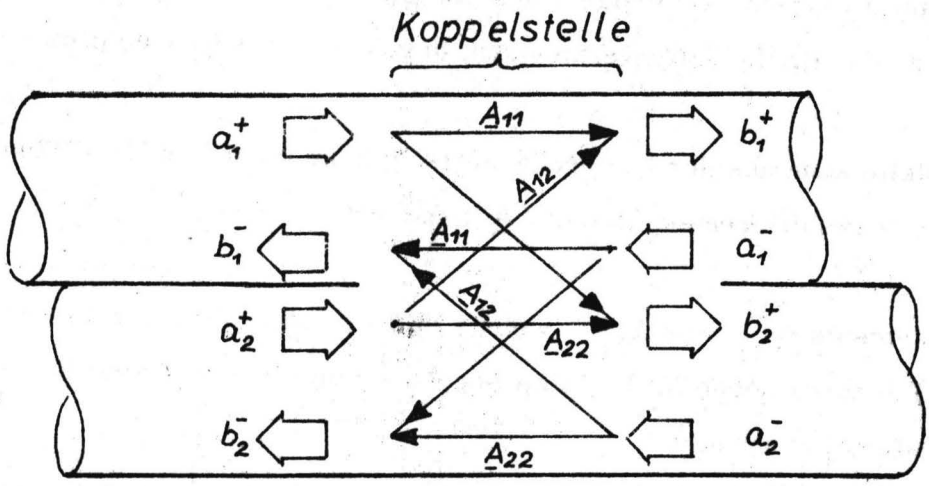
Die Darstellung : Ausgangsgrößen in Abhängigkeit der Eingangsgrößen wird Kettenform genannt .

Wie üblich werden die Kettenmatrixelemente mit $\underline{A}$ bezeichnet.

Signalflussdiagramm für die in - z - Richtung laufenden Wellen :



Durch " Übereinanderlegen " entsteht das vollständige Signalflussdiagramm für hinlaufende (hochgestellter Index +) und rücklaufende Wellen (hochgestellter Index -) :



Eine mögliche Matrixanordnung ist z. B.

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1^+ \\ \underline{b}_2^+ \\ \underline{b}_1^- \\ \underline{b}_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & 0 & 0 \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ 0 & 0 & \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1^+ \\ \underline{a}_2^+ \\ \underline{a}_1^- \\ \underline{a}_2^- \end{bmatrix}$$

Auch hier sind die Hauptdiagonalelemente Transmissionskoeffizienten. Es ist weder eine Streu- noch eine Kettenmatrix.

Weitere einschränkende Annahmen über die Koppelstelle werden nicht mehr gemacht. Damit ist zugelassen:

- Die Koppelstelle darf verlustbehaftet sein.

- Die Koppelstelle kann eine beliebige Ausdehnung über die Leitungslänge hinweg haben (z.B. Wellentypverkopplung in gekrümmten Kreisholleitern).

- Die Koppelstelle kann aus der Hintereinanderschaltung mehrerer Teil- Koppelstellen mit der resultierenden Matrix ($\underline{A}$) bestehen.

- Die Matrixelemente $\underline{A}_{12}$ und $\underline{A}_{21}$, welche ja die Verkopplung beschreiben, dürfen alle Werte zwischen Null (keine Kopplung) und betragsmäßig Eins (totale Kopplung) annehmen.

Zunächst wird die Übertragungsfunktion des Resonators mit einer solchen allgemeinen Verkopplung im Inneren hergeleitet.
Dann wird der Sonderfall einer verlustlosen und punktförmigen Kopplung (keine Ausdehnung der Koppelstelle in z - Richtung) diskutiert.
Hierfür zugeschnitten sind zwei Komplexe Größen $\underline{\phi}$ und $\underline{\theta}$, die sich formal aus jeder Matrix ($\underline{A}$) gewinnen lassen :

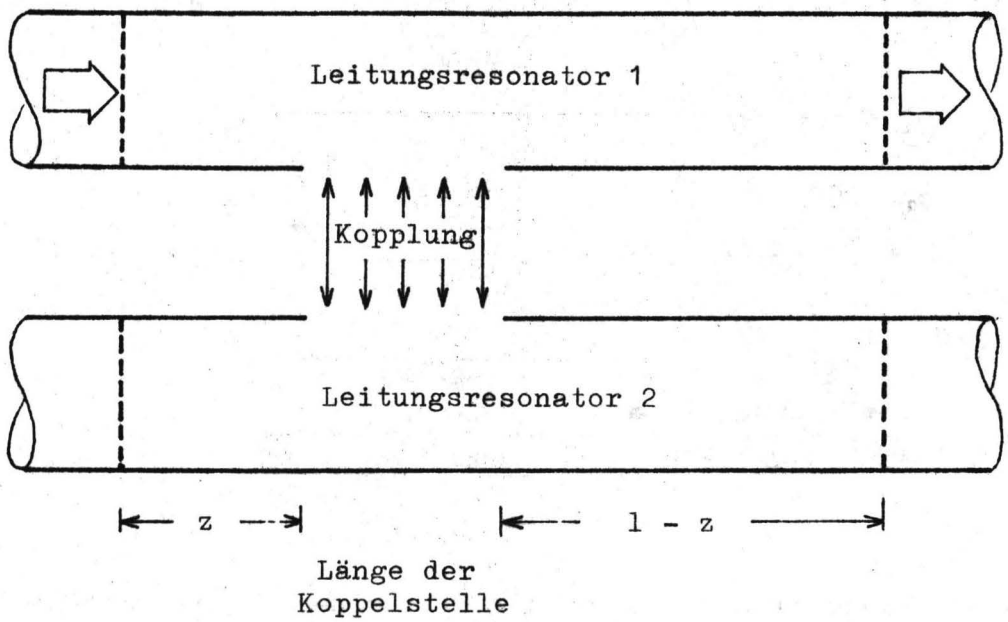
$$e^{-j2\underline{\phi}} = \mathrm{Det}\left\{ (\underline{A}) \right\} = \underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21} \qquad (37)$$

$$e^{-j2\underline{\theta}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}} \qquad (38)$$

Für verlustlose Koppelstellen ist nach Gl. (9) der Betrag der Determinante = 1 , $\underline{\phi}$ und $\underline{\theta}$ sind dann reelle, im allgemeinen frequenzabhängige Winkelgrößen.

3.2 Das Übertragungsverhalten für den Haupttyp

Jedem Wellentyp wird wieder eine eigene Leitung zugeordnet :

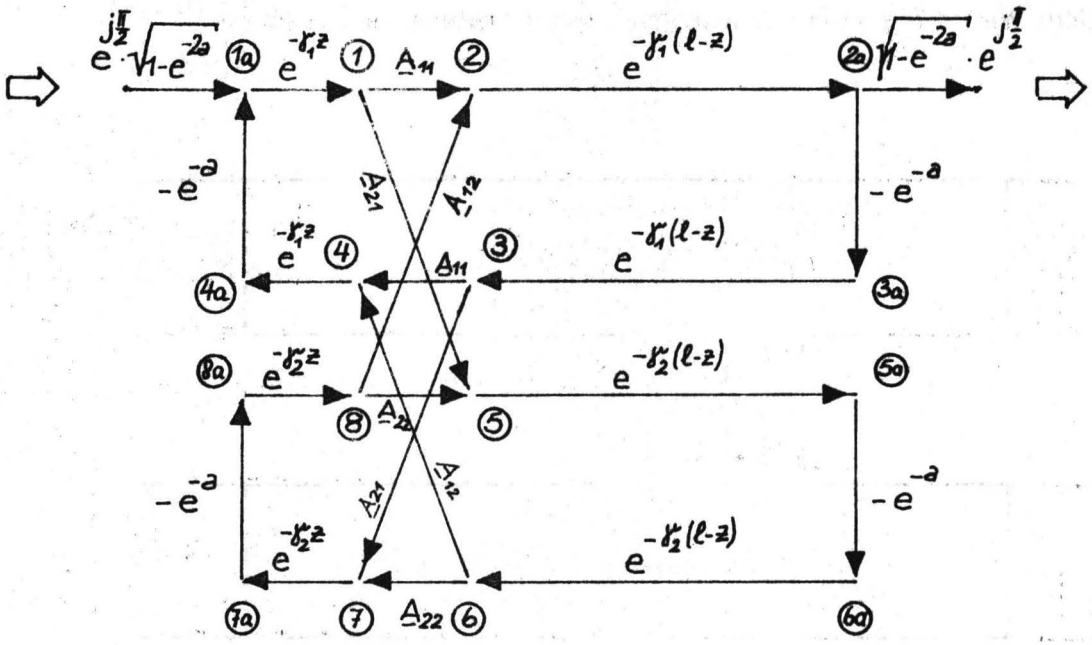


Der Resonator ist jetzt um die Länge der Koppelstelle länger als l . Da am Ende dieses Kapitels der Sonderfall einer punktförmigen Verkopplung (Länge der Koppelstelle = 0 , l = Gesamtlänge des Resonators) diskutiert wird, ist es bequem, mit l denjenigen Teil des Resonators zu bezeichnen, wo beide Wellentypen sich unverkoppelt nebeneinander mit ihren ungestörten Fortpflanzungskonstanten ausbreiten:

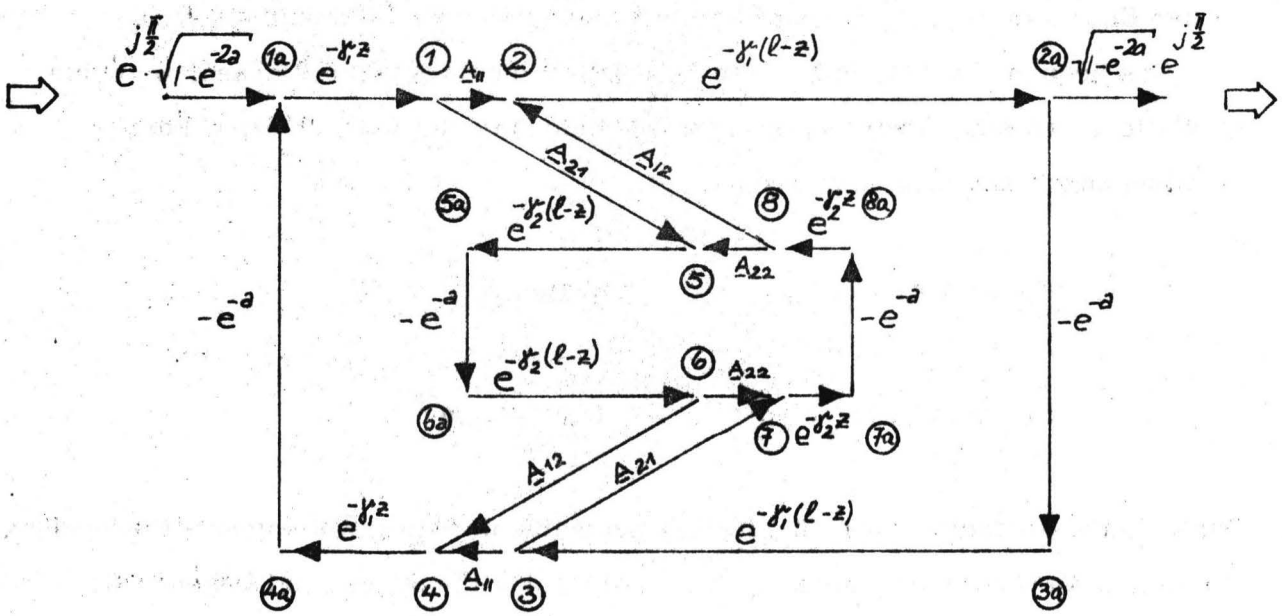
$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = j\,(\beta_1 - j\alpha_1) \qquad \text{Wellentyp 1}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = j\,(\beta_2 - j\alpha_2) \qquad \text{Wellentyp 2} \qquad (39)$$

Das Signalflussdiagramm für die Transmission des Hauptwellentyps (Einkopplung des reinen Haupttyps , selektiv Auskopplung des Haupttyps) hat folgende Gestalt :



Hierbei wurde für die Phase des Reflexionsfaktors an der Ein- und Auskoppeblende b = π wie bei ideal metallischer Reflexion gesetzt. Durch Umzeichnen wird das Diagramm übersichtlicher :



3.21 Die allgemeine Transmissionsgleichung für den Haupttyp

Aus dem letzten Signalflussdiagramm lassen sich die Pfade und Schleifen leicht finden. Sie werden wieder durch Rechtecke bzw. Kreise symbolisiert.

Pfade :

$$\boxed{\mathrm{I}} = e^{j\pi}\,(1-e^{-2a})\cdot \underline{A}_{11}\, e^{-\gamma_1 l}$$

$$\boxed{\mathrm{II}} = e^{j\pi}\,(1-e^{-2a})\cdot \underline{A}_{21}\cdot \underline{A}_{22}\cdot \underline{A}_{12}\cdot e^{-2a}\cdot e^{-\gamma_1 l - 2\gamma_2 l}$$

Schleifen

1. Ordnung : **2. Ordnung**

aussen $\quad \mathrm{I} = \underline{A}_{11}^{2}\, e^{-2a}\cdot e^{-2\gamma_1 l}$

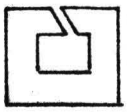
innen $\quad \mathrm{II} = \underline{A}_{22}^{2}\cdot e^{-2a}\cdot e^{-2\gamma_2 l}$

$\Big\}\ \mathrm{I}\cdot\mathrm{II}$

links $\quad \mathrm{III} = \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{12}\, e^{-2a}\cdot e^{-2\gamma_1 z}\cdot e^{-2\gamma_2 (l-z)}$

rechts $\quad \mathrm{IV} = \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\cdot e^{2a}\cdot e^{-2\gamma_1 (l-z)}\cdot e^{-2\gamma_2 z}$

$\Big\}\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}$



$\mathrm{V} = \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}\,\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{11}\, e^{-4a}\cdot e^{-2\gamma_1 l}\cdot e^{-2\gamma_2 l}$

$\mathrm{VI} = \mathrm{V}$

Die Transmission mit Hilfe der Pfad - Schleifen - Regel :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{\boxed{\mathrm{I}}\,(1-\mathrm{II}) + \boxed{\mathrm{II}}}{1-[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VI}]+\mathrm{I}\,\mathrm{II}+\mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}}}$$

(40)

Der Nenner der Transmission

$$\text{Nenner} = 1 - (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}) - 2 \cdot \mathrm{V} + \mathrm{I}\,\mathrm{II} + \mathrm{III}\,\mathrm{IV}$$

1. Zwischenrechnung

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} =$$

$$= \underline{A}_{11}^2 e^{-2a-2\gamma_1 l} + \underline{A}_{22}^2 e^{-2a-2\gamma_2 l} + \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} e^{-2a-2\gamma_1 z-2\gamma_2(l-z)} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} e^{-2a-2\gamma_1(l-z)-2\gamma_2 z}$$

mit GL (37) und (38) kann man für $\underline{A}_{11}^2$ schreiben: $\underline{A}_{11}^2 = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} e^{-j2\Theta} = (\underline{A}_{12}\underline{A}_{21} + e^{-j2\Phi}) \cdot e^{-j2\Theta}$

analog: $\underline{A}_{22}^2 = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} e^{j2\Theta} = (\underline{A}_{12}\underline{A}_{21} + e^{-j2\Phi}) e^{j2\Theta}$

$$= (\underline{A}_{12}\underline{A}_{21} + e^{-2j\Phi}) e^{-j2\Theta-2a-2\gamma_1 l} + (\underline{A}_{12}\underline{A}_{21} + e^{-j2\Phi}) e^{j2\Theta-2a-2\gamma_2 l} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\left\{e^{-2a-2\gamma_1 z-2\gamma_2(l-z)} + e^{-2a-2\gamma_1(l-z)-2\gamma_2 z}\right\}$$

$$= e^{-2a}\left[e^{-j2\Phi-j2\Theta-2\gamma_1 l} + e^{-j2\Phi+j2\Theta-2\gamma_2 l} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\left\{e^{-j2\Theta-2\gamma_1 l} + e^{j2\Theta-2\gamma_2 l} + e^{-2\gamma_1 z-2\gamma_2(l-z)} + e^{-2\gamma_1(l-z)-2\gamma_2 z}\right\}\right]$$

$$= e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)l}\left[e^{-j2\Theta-j2\Phi-(\gamma_1-\gamma_2)l} + e^{j2\Theta-j2\Phi+(\gamma_1-\gamma_2)} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\left\{e^{-j2\Theta-(\gamma_1-\gamma_2)l} + e^{j2\Theta+(\gamma_1-\gamma_2)l} + e^{(\gamma_1-\gamma_2)l-2(\gamma_1-\gamma_2)z} + e^{-(\gamma_1-\gamma_2)l+2(\gamma_1-\gamma_2)z}\right\}\right]$$

Umformen der geschweiften Klammer:

$$\{\ \} = \left\{e^{(\gamma_1-\gamma_2)l+j\Theta-(\gamma_1-\gamma_2)z}\left(e^{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta} + e^{-(\gamma_1-\gamma_2)z-j\Theta}\right) + e^{-(\gamma_1-\gamma_2)l-j\Theta+(\gamma_1-\gamma_2)z} \cdot \left(e^{-(\gamma_1-\gamma_2)z-j\Theta} + e^{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta}\right)\right\}$$

$$= 4 \cdot \cosh\left\{(\gamma_1-\gamma_2)(l-z)+j\Theta\right\} \cosh\left\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\right\}$$

Damit wird: Ⓘ + Ⓘⓘ + Ⓘⓘⓘ + Ⓘⓥ =

$$= e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-2j\Phi}\left[e^{-(\gamma_1-\gamma_2)\ell-j2\Theta}+e^{(\gamma_1-\gamma_2)\ell+j2\Theta}+4\,\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{j2\Phi}\cdot\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)(\ell-z)+j\Theta\}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\}\right]$$

<u>2. Zwischenrechnung:</u>

$$-2\,Ⓥ + ⓘⓘ + ⓘⓘⓘⓥ =$$

$$= -2\,\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{-4a-2\gamma_1\ell-2\gamma_2\ell}+(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22})^2\cdot e^{-4a-2\gamma_1\ell-2\gamma_2\ell}+(\underline{A}_{12}\underline{A}_{21})^2\,e^{-4a-2\gamma_1\ell-2\gamma_2\ell}$$

$$= e^{-4a-2(\gamma_1+\gamma_2)\ell}\underbrace{\left[(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22})^2+(\underline{A}_{12}\underline{A}_{21})^2-2\,\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\right]}_{=[\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}]^2=[\mathrm{Det}(\underline{A})]^2=e^{-4j\Phi}}$$

Damit wird der Nenner

$$\text{Nenner} = 1 - e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-2j\Phi}\left[e^{(\gamma_1-\gamma_2)\ell+2j\Theta}+e^{-(\gamma_1-\gamma_2)\ell-2j\Theta}+4\,\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{j2\Phi}\cdot\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)(\ell-z)+j\Theta\}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\}\right]+$$
$$+e^{-4a-2(\gamma_1+\gamma_2)\ell-4j\Phi}$$

$$= e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-2j\Phi}\left[\underbrace{e^{2a+(\gamma_1+\gamma_2)\ell+2j\Phi}+e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell+2j\Phi}-e^{(\gamma_1-\gamma_2)\ell+2j\Theta}-e^{-(\gamma_1-\gamma_2)\ell-2j\Theta}}_{=\left(e^{\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta}-e^{-(\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta)}\right)\left(e^{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta}-e^{-(\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta)}\right)}-4\,\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{j2\Phi}\cdot\cosh\{\ldots\}\cdot\cosh\{\ldots\}\right]$$

$$= 4\cdot\sinh\{\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta\}\cdot\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta\}$$

$$\text{Nenner} = 4\, e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-2j\Phi}\Big[\sinh\{\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta\}\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta\} - A_{12}A_{21}\, e^{j2\Phi}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)(\ell-z)+j\Theta\}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\}\Big] \tag{40a}$$

<u>Der Zähler der Transmission :</u>

$$\text{Zähler} = \boxed{I}\,(1-\text{II}) + \boxed{II}$$

$$= e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,\underline{A}_{11}\,e^{-\gamma_1\ell}\left(1-\underline{A}_{22}^{2}\,e^{-2a-2\gamma_2\ell}\right) + e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,A_{21}A_{12}A_{22}\,e^{-2a-\gamma_1\ell-2\gamma_2\ell}$$

$$= e^{j\pi}(1-e^{-2a})\Big[A_{11}e^{-\gamma_1\ell} - \underline{A}_{22}\,e^{-2a-\gamma_1\ell-2\gamma_2\ell}\underbrace{(\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}-A_{11}A_{22})}_{=-e^{-2j\Phi}}\Big]$$

$$= e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,A_{11}e^{-\gamma_1\ell}\Big[1-e^{-2a-2j\Phi-2\gamma_2\ell}\cdot\underbrace{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}_{=e^{j2\Theta}}\Big]$$

$$\text{Zähler} = e^{j\pi}\underbrace{(e^{a}-e^{-a})}_{=2\sinh a}\,e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-2a-j\Phi+j\Theta}\underbrace{\Big[e^{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta} - e^{-(\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta)}\Big]}_{=2\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi_1-j\Theta\}}$$

<u>Transmission :</u>

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j\pi}\cdot\sinh a\cdot e^{j\Phi+j\Theta}\cdot\underline{A}_{11}\cdot\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta\}}{\sinh\{\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta\}\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta\} - A_{12}A_{21}\,e^{j2\Phi}\cdot\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)(\ell-z)+j\Theta\}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\}}} \tag{41}$$

3.22 Diskussion der Transmissionsgleichung (41)

Bis auf die Voraussetzungen für die Koppelstelle : Nur Vorwärtsanregung und Symmetrie für beide Übertragungsrichtung gilt (41) allgemein, also z. B. auch für den Fall, daß die Koppelstelle den ganzen Resonator einnimmt, l und z also gleich Null zu setzen sind. Trotzdem ist die Gl. (41) für den Fall zugeschnitten, daß der Resonator länger als die Koppelstelle ist.

Als unabhängige Variable soll das Produkt $\beta_1 l$ angesehen werden. Für TEM - Wellen ist es linear, für Hohlleiterwellen über die Dispersionsgleichung mit der Frequenz verknüpft (Gl. (3) und (4), in beiden Fällen linear mit der Zahl der Halbwellen des Hauptwellentyps im Resonator.

Im Multimode-Resonator sei die Phasenkonstante des angekoppelten Störwellentyps in bekannter Weise mit der Phasenkonstanten des Haupttyps verknüpft:

$$\beta_2 l = \beta_2 l \; (\beta_1 l) \qquad (42)$$

Änderung der Resonatorlänge bei festgehaltener Frequenz.

Auf diesen Fall wird nur kurz eingegangen. Vergrößert man z. B. l, so wächst $\beta_1 \ell$ und $\beta_2 \ell$. Die Größen ϕ und Θ der Koppelmatrix sind nicht von l abhängig, bleiben also konstant und liefern unter den trigonometrischen Funktionen konstante Phasen- und Dämpfungsanteile.

Der wesentliche Einfluß der Verkopplung steckt in dem Störterm des Nenners der Transmission :

$$A_{12} A_{21} e^{j 2 \theta} \cdot \frac{\cos\left\{ (\beta_1 - \beta_2)(l - z) + \theta - j\,(\alpha_1 - \alpha_2)(l-z)\right\} \cos\left\{(\beta_1 - \beta_2)\, z + \theta - j(\alpha_1 - \alpha_2) z\right\}}{\sin\left\{ \beta_2 l + \phi - \theta - j\,(\alpha_2 l + a)\right\}}$$

Dieser Term ist also selber eine Resonanz mit einer hantelförmigen Ortskurve, welche zu der Ellipse des Nenners der ungestörten Transmission addiert werden muß und die für Resonanz des Störtyps (ϕ und θ seien reell)

$$\beta_2 l + \phi - \theta = N \cdot \pi, \quad N = 1, 2, 3 \ldots \qquad (43)$$

maximale Werte annehmen kann.

Das Produkt $\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}$ beschreibt die Stärke der Verkopplung von Haupt- und Störresonanzkreis.

3.23 Der Frequenzgang der Haupttyp - Transmission für eine punktförmige und verlustlose Koppelstelle.

Verlustlos heißt : $\underline{\phi}$ und $\underline{\theta}$ sind reelle Winkel. Punktförmig heißt : vernachlässigbar kleine Ausdehnung der Koppelstelle in z-Richtung, die Koppelmatrixelemente können (in kleinen Frequenzbereichen) als konstant angenommen werden. Eine weitere bequeme und sinnvolle Annahme sei :

$$\text{arc}\left\{\underline{A}_{11}\right\} = \text{arc}\left\{\underline{A}_{22}\right\} = 0 \qquad (44)$$

Wir führen nun einen komplexen Koppelfaktor $\underline{C}$ ein. Die obige Annahme und die Beziehungen für verlustlose Zweitore (Gl. (6) bis (8)) werden erfüllt durch folgende Zuordnungen:

$$\underline{A}_{12} = \underline{C}^* \; ; \quad \underline{A}_{21} = -\underline{C} \; ; \quad \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*} \qquad (45)$$

$\underline{\phi}$ und $\underline{\theta}$ sind dann Null.

Aus Gl. (41) wird damit

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j\pi/2} \cdot \sinh a \cdot \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*}}{\sin\left\{\beta_1 l - j(\alpha_1 l + a)\right\} - \underline{C}\underline{C}^* \dfrac{\cos\left\{(\beta_1 - \beta_2)(l-z) - j(\alpha_1 - \alpha_2)(l-z)\right\} \cos\left\{(\beta_1 - \beta_2)z - j(\alpha_1 - \alpha_2)z\right\}}{\sin\left\{\beta_2 l - j(\alpha_2 l + a)\right\}}} \qquad (46)$$

Für eine Koppelstelle genau in der Mitte des Resonators wird $z = l/2$

$$\underline{T} = \frac{e^{j\pi/2} \sinh a \cdot \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*}}{\sin\left\{\beta_1 l - j(\alpha_1 l + a)\right\} - \underline{C}\underline{C}^* \dfrac{\cos^2\left\{(\beta_1 - \beta_2)\, l/2 - j(\alpha_1 - \alpha_2)\, l/2\right\}}{\sin\left\{\beta_2 l - j(\alpha_2 l + a)\right\}}} \qquad (47)$$

3.24 Kurvendarstellungen zur Transmission des Hauptwellentyps über einen Leitungsresonator, in dessen Inneren an einer Störstelle eine Störwelle mit der Hauptwelle verkoppelt ist. (Punktförmige Verkopplung in der Mitte).

Es werden noch einige Abkürzungen eingeführt :

$$a_1 = a + \alpha_1 l \quad \text{Gesamtdämpfung für den Hauptwellentyp}$$
$$a_2 = a + \alpha_2 l \quad \text{" " " " Störwellentyp} \tag{48}$$

Für eine bestimmte Frequenz f sei der Hauptwellentyp gerade in Resonanz :

$\beta_1 l = N_1 \cdot \pi$ N_1 ist die Zahl der Halbwellen des Hauptwellentyps und sei z. B. eine gerade Zahl.

Gleichzeitig sei der Störwellentyp mit in Resonanz, und zwar so, daß der Störterm in Gl. (47) ein Maximum wird. Das ist dann der Fall, wenn $\beta_2 l = N_2 \pi$ und N_2 ebenfalls eine gerade Zahl ist.

Ausgehend von dieser gemeinsamen Resonanzstelle genügt es z. B. die Phasenabweichungen

$$x_1 = \beta_1 l - N_1 \pi$$
$$x_2 = \beta_2 l - N_2 \pi \tag{49}$$

zu beachten, da die trigonometrischen Funktionen ja periodisch sind.

Die folgenden Bilder zeigen Resonanzkurven für wachsenden Koppelfaktor C. Hierbei wurde wieder $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gesetzt, beide Wellentypen werden nur durch Ein- und Auskoppelblende gleich stark bedämpft. Die Phasenkonstanten seien gleich, so daß beide Wellentypen immer gleichzeitig in Resonanz sind. Dies wird durch zwei gleichlange, räumlich getrennte Resonatoren symbolisiert.

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j\pi/2} \cdot \sinh a \cdot \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*}}{\sin\left\{x - ja\right\} - \underline{C}\underline{C}^* \dfrac{1}{\sin\left\{x - ja\right\}}}} \tag{50}$$

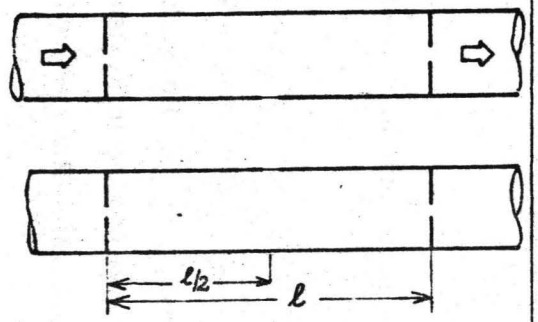
mit $x_1 = x_2 = x$

)

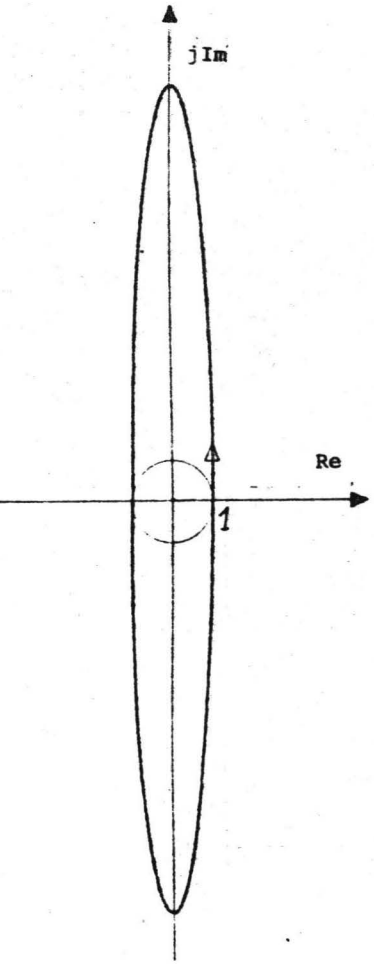
Reflexionsdämpfung von
Ein- und Auskoppelblende a = 0,1

Koppelfaktor $c = 0$

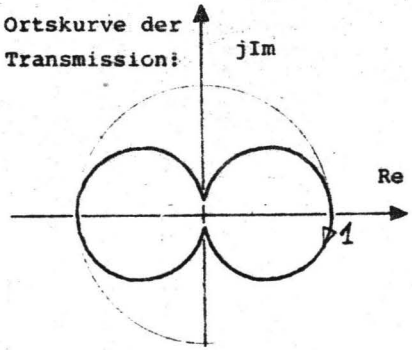
Modell:



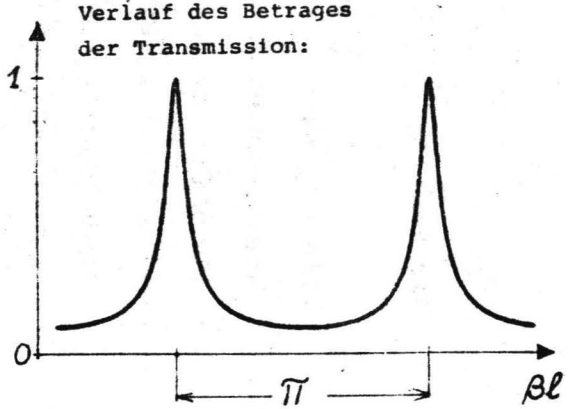
Ortskurve der reziproken
Transmission:



Ortskurve der
Transmission:



Verlauf des Betrages
der Transmission:

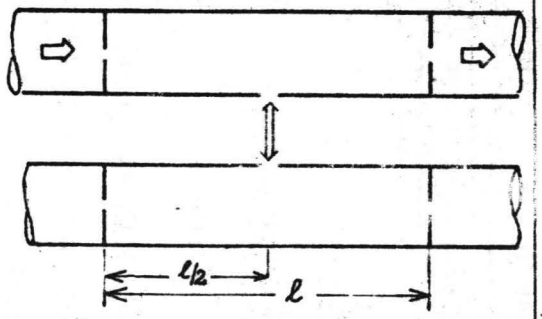


②

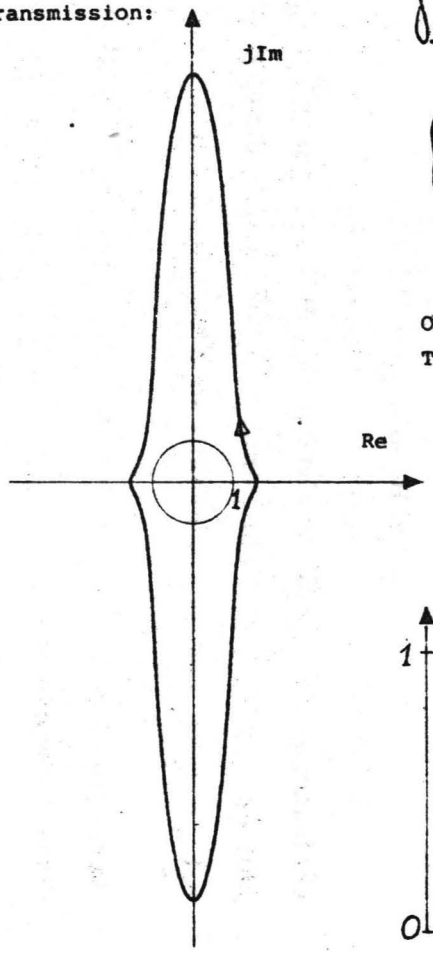
Reflexionsdämpfung von
Ein- und Auskoppelblende a = 0,1

Koppelfaktor $c = 0.075$

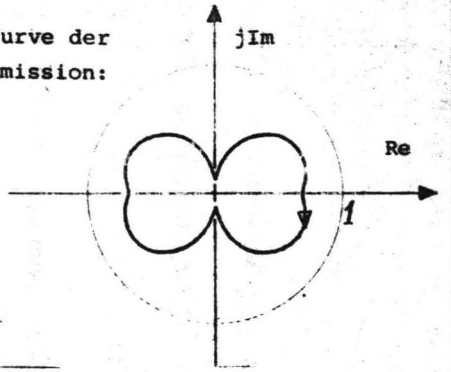
Modell:



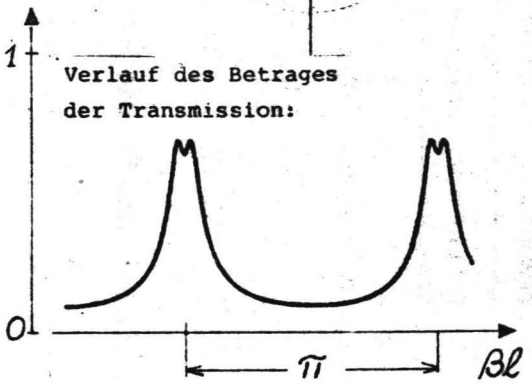
Ortskurve der reziproken
Transmission:



Ortskurve der
Transmission:



Verlauf des Betrages
der Transmission:

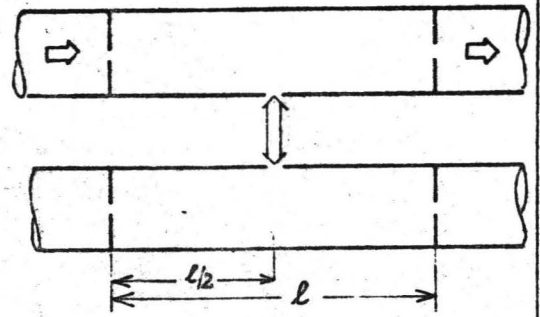


3

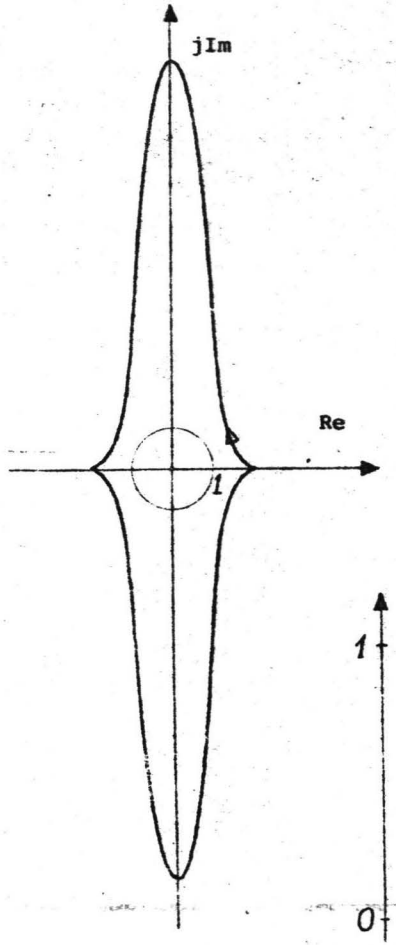
Reflexionsdämpfung von
Ein- und Auskoppelblende a = 0,1

Koppelfaktor $c = 0.1$

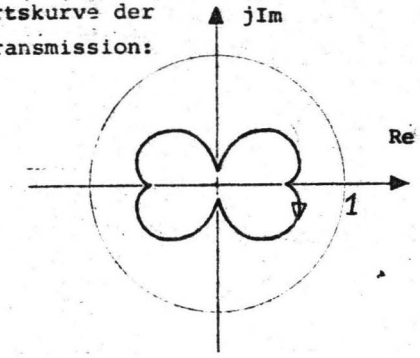
Modell:



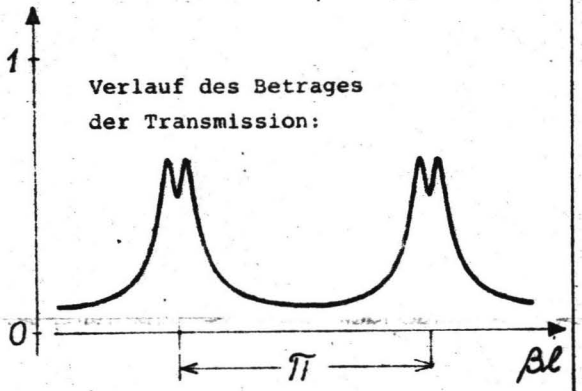
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:



Verlauf des Betrages der Transmission:

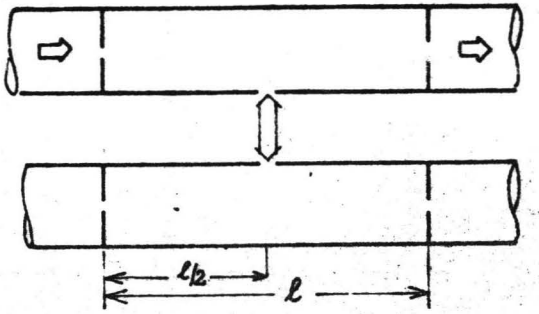


4

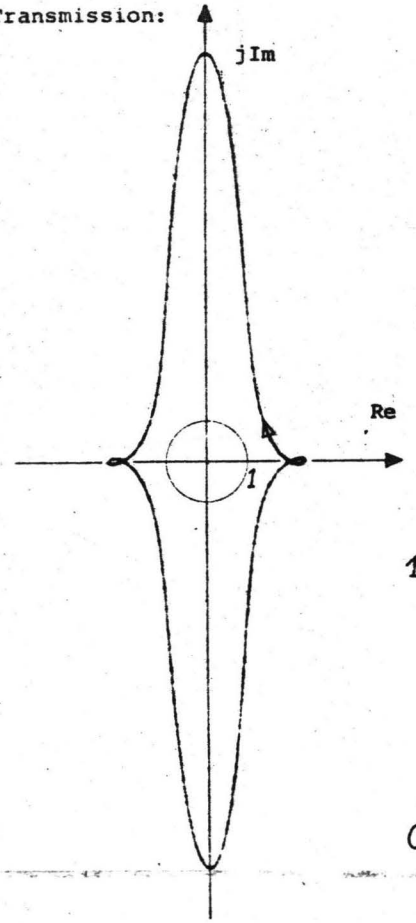
Reflexionsdämpfung von
Ein- und Auskoppelblende a = 0,1

Koppelfaktor $c = 0.12$

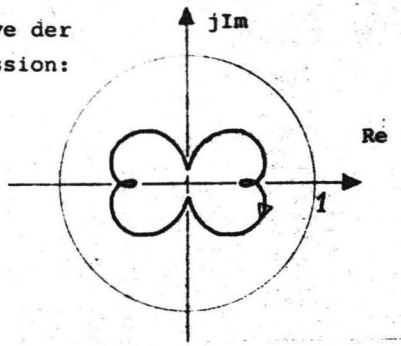
Modell:



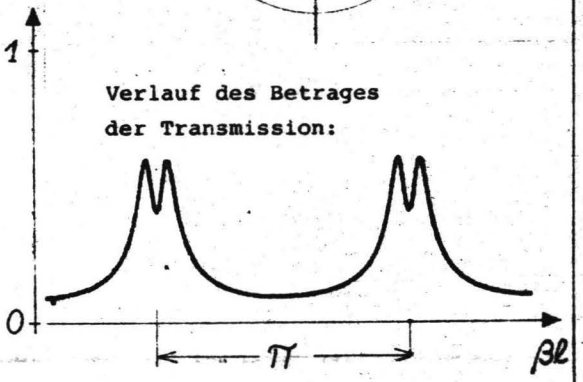
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:



Verlauf des Betrages der Transmission:



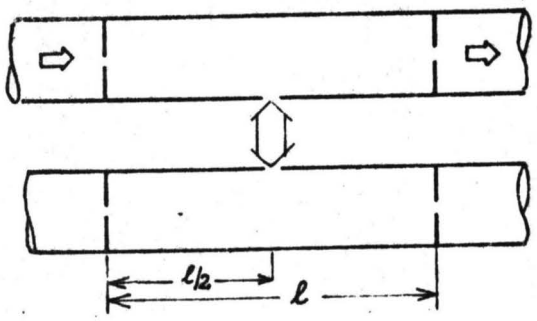
PARALLELGEKOPPELTE LEITUNGSRESONATOREN

(5)

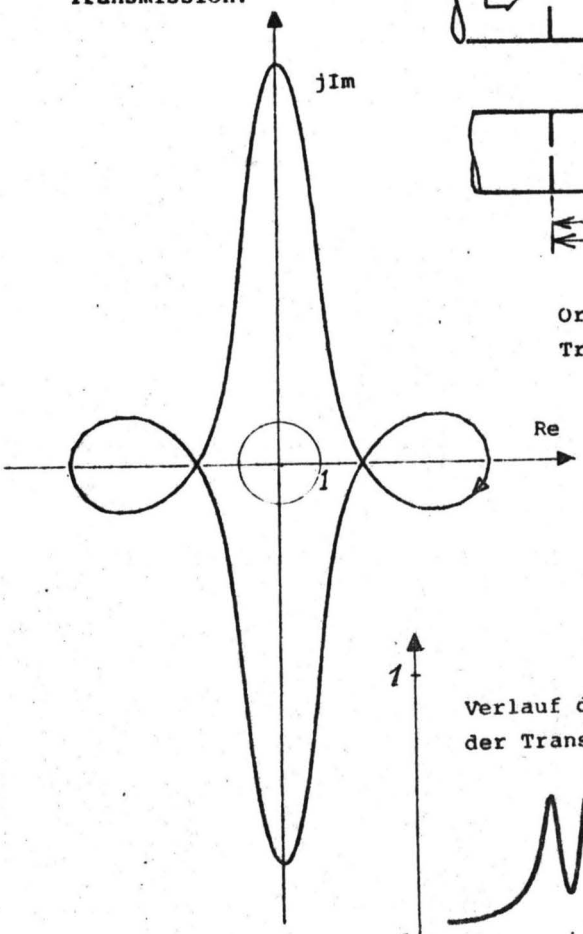
Reflexionsdämpfung von
Ein- und Auskoppelblende a = 0,1

Koppelfaktor $\boxed{c = 0.2}$

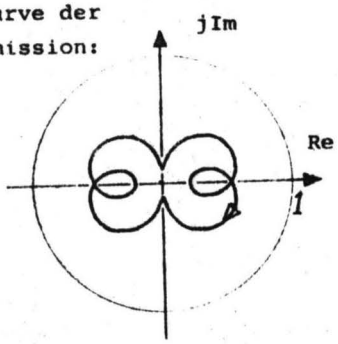
Modell:



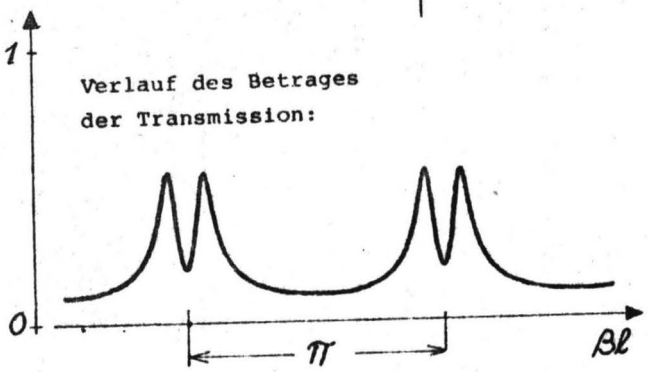
Ortskurve der reziproken Transmission:



Ortskurve der Transmission:



Verlauf des Betrages der Transmission:



3.25 Resonanzkurven bei unterschiedlichen Phasenkonstanten von Haupt - und Störwelle

β_2 sei auf bekannte Weise mit β_1 verknüpft :

$$\beta_2 = \beta_2 \; (\beta_1)$$

Die Taylorentwicklung in der Umgebung der gemeinsamen Resonanzstelle :

$$\beta_2 l = \beta_2 l \Big|_{Res} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \cdot \delta \, (\beta_1 l) + \ldots \quad \text{mit Gl. (49) :}$$

$$\beta_2 l \approx N_2 \pi + \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \cdot x_1$$

Die Transmission in der Umgebung der gemeinsamen Resonanzstelle mit Gl (47)

$$\boxed{\underline{T} = \frac{e^{j\pi/2} \cdot \sinh a \cdot \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*}}{\sin\left\{x_1 - j a_1\right\} - \underline{C}\underline{C}^* \dfrac{\cos^2\left\{\dfrac{1 - \partial\beta_2/\partial\beta_1}{2} \cdot x_1 - j \dfrac{a_1 - a_2}{2}\right\}}{\sin\left\{x_1 \cdot \dfrac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1} - j a_2\right\}}} \qquad (51)$$

Die Kurven auf den folgenden drei Seiten gelten wieder für $a_1 = a_2 = a$.
Das differentielle Phasenkonstantenverhältnis wurde zu

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} = 1,2 \quad \text{gewählt.}$$

Die Störwelle " eilt vor " : 12 mal gilt für sie die Resonanzbedingung, während die Hauptwelle 10 mal in Resonanz gerät. Dann ist die Differenz der Halbwellen wieder eine gerade Zahl und eine gemeinsame Resonanzstelle liegt vor.
Resonanz - Nr. 5 des Hauptwellentyps fällt mit Nr. 6 der Störwelle zusammen :

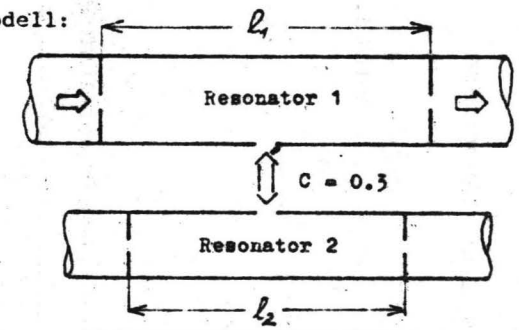
$$\cos^2\left\{\frac{-0,2 \cdot 5\pi}{2}\right\} = \cos^2\left\{-\pi/2\right\} = 0$$. Die Störwelle wird hier gar nicht angeregt. Der Zähler des Störterms in (51) , allgemeiner noch in (46) beschreibt - abhängig vom Ort der Verkopplung - das periodische Auftauchen und Verschwinden der Störresonanz. Bei konstanter Frequenz und variabler Länge ist hierfür die Differenz ($\beta_1 - \beta_2$) , bei konstaner Länge und variabler Frequenz das differentielle Verhältnis $\partial\beta_2/\partial\beta_1$ maßgeblich.

PARALLELGEKOPPELTE LEITUNGSRESONATOREN

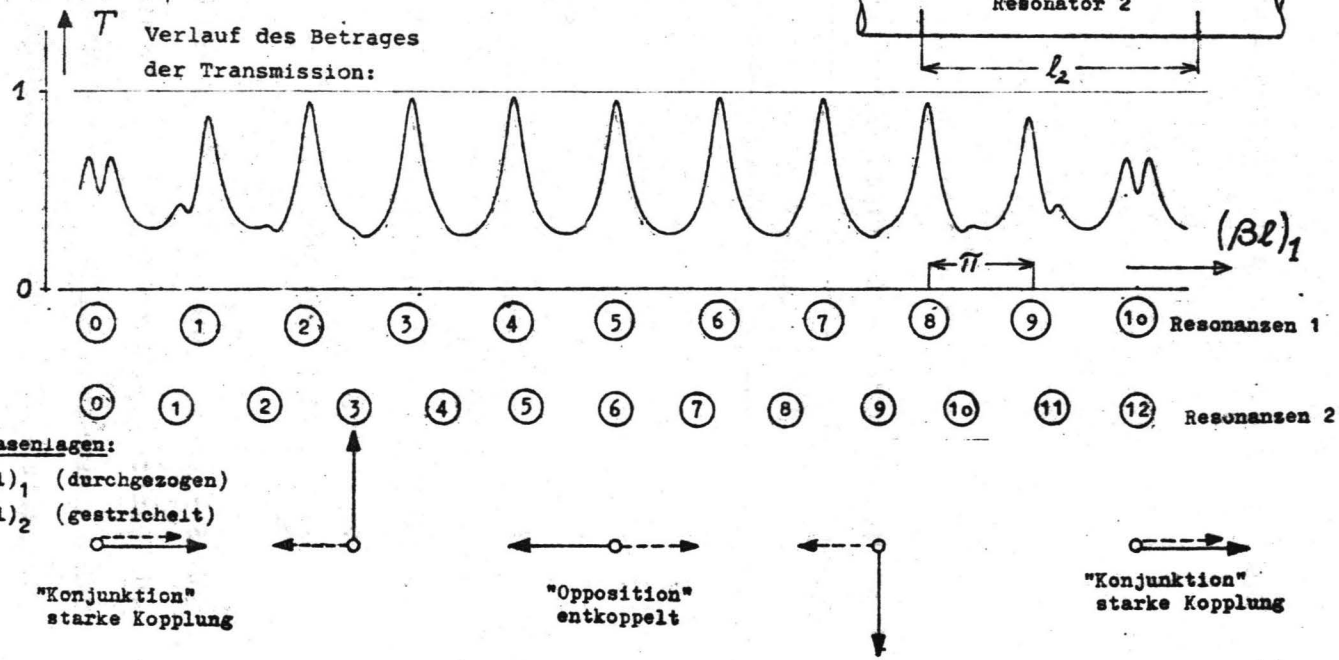
Reflexionsdämpfung von Ein- und Auskoppelblende: a = 0,2

differentielles Phasenverhältnis: $\frac{d(\beta\ell)_1}{d(\beta\ell)_2} = 1{,}2$

Modell:

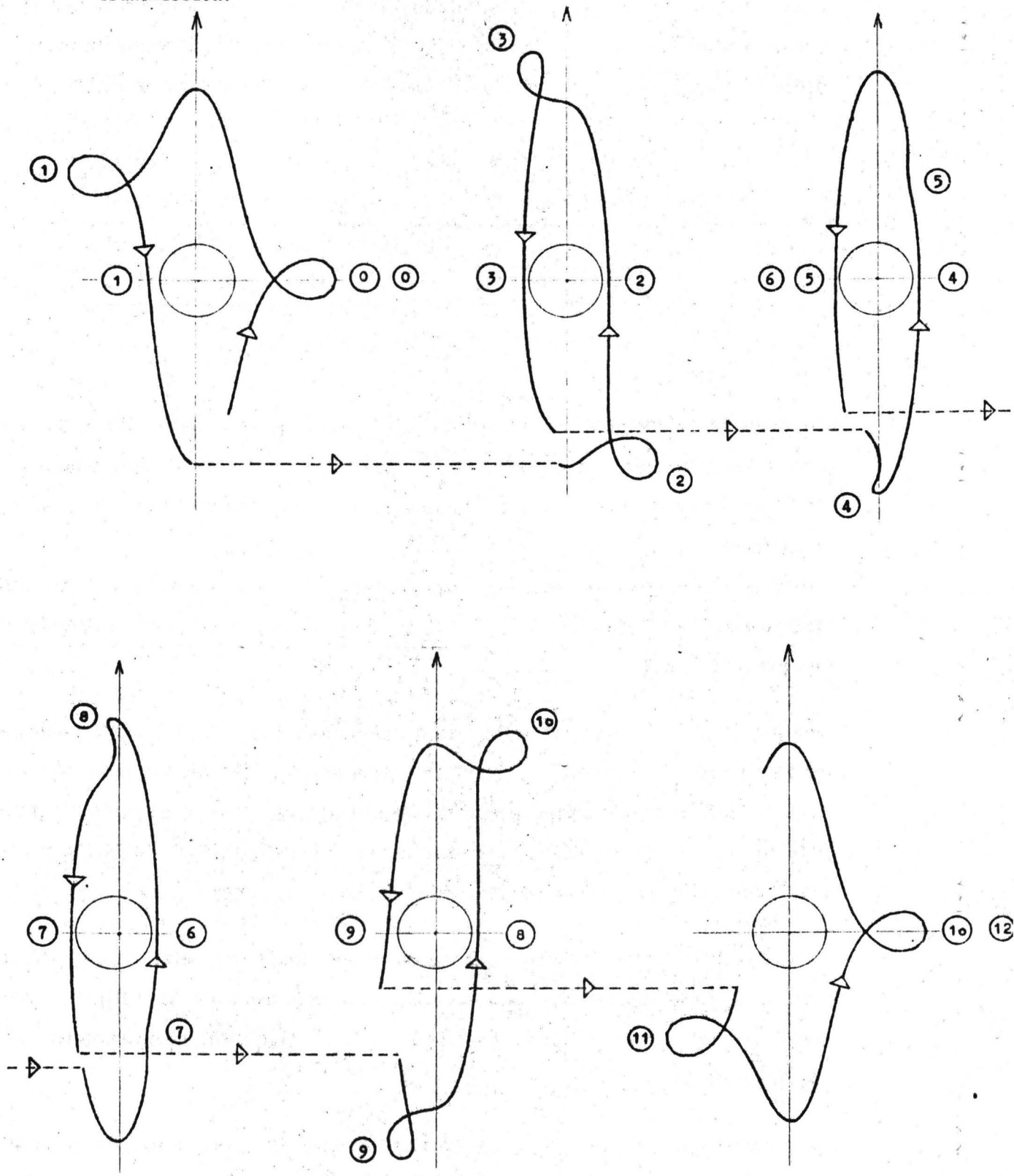


Verlauf des Betrages der Transmission:



PARALLELGEKOPPELTER LEITUNGSRESONATOR

Ortskurve der reziproken Transmission:



3.26 Der Einfluß des Störterms auf die Resonanzen des Haupttyps

Für eine punktförmige Verkopplung von Haupt- und Störwelle in der Mitte des Resonators wird noch einmal Gl. (51) angeschrieben, aber so abgeändert, daß zu x_2 (Phase des Störtyps) noch ein konstanter Anteil x_{20} addiert wird. Nun ist es durch Wahl von x_{20} möglich, z. B. jeden der 10 Resonanzfälle der letzten Bilder zu erzeugen x_1 braucht nur zwischen 0 und 2π bewegt werden.

$$\underline{T} = \frac{e^{j\pi/2} \cdot \sinh a \cdot \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*}}{\sin\left\{x_1 - ja_1\right\} - \underline{C}\underline{C}^* \dfrac{\cos^2 \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \partial\beta_2/\partial\beta_1\right)x_1 - x_{20} - j\left(a_1 - a_2\right)\right\}}{\sin\left\{x_1 \cdot \partial\beta_2/\partial\beta_1 + x_{20} - j\,a_2\right\}}} \qquad (51\,a)$$

Die Form der Resonanzkurven des einfachen Resonators lassen sich(in der normierten Darstellung) durch einen einzigen Parameter beschreiben : die Dämpfung a_1. Deshalb genügt zur Bestimmung der Dämpfung auch eine einzige Meßgröße , z. B. die Bandbreite.

Hier werden die Resonanzkurven schwach gestört bis stark deformiert durch den Einfluß der Stör-Parameter : $\underline{C}\underline{C}^*$, x_{20} , a_2 und (bei konstanter Länge des Resonators) $\partial\beta_2/\partial\beta_1$.

Der Störterm im Nenner ist selber eine Resonanzkurve ! Es ist die Resonanzkurve der Störwelle : Man würde sie erhalten, wenn man den Resonator modenrein mit der Störwelle betriebe. Hier allerdings multipliziert mit dem Koppelfaktorquadrat $\underline{C}\underline{C}^*$ und einer $\cos^2$- Funktion, in welcher die Phasendifferenz der Zeiger von Haupt- und Störwelle am Koppelort (hier also in der Mitte) steckt.

Die Ortskurve der reziproken Transmission des Haupttyps setzt sich additiv zusammen aus der ungestörten Ellipse und einer invertierten Stör-Ellipse, welcher - wäre sie einer direkten Messung zugänglich- man alle vier Störparameter entnehmen könnte !

Die direkte Messung des Störterms scheint nicht möglich zu sein, die von ihm erzeugten Deformationen der Haupttypresonanz lassen sich gut messen.

3.27 Der Einfluß des Störterms bei kleinen Koppelfaktoren

Durch große Störkreisdämpfung wird auch der Hauptkreis bedämpft : geringere maximale Transmission des Haupttyps, Bandbreitenerhöhung

Für geringe Dämpfung des Haupttyps ($a_1 < 0,1$) kann man den Ellipsenbogen (Ortskurve des Nenners der Transmission) in Resonanznähe durch eine Gerade ersetzen. Gl. (20a) besagt ja : Die (normierte) Bandbreite $\Delta\beta l$ ist gleich dem Imaginärteil des Nenners (der Transmission) bei Resonanz. Dieser Satz sinngemäß auf Gl. (51a) angewendet ergibt die Bandbreitenänderung bei Verkopplung mit einer Störwelle ($x_1=0$) : (siehe hierzu [8])

$$\Delta\beta l \approx a_1 + \mathrm{Im}\left\{ \underline{C}\underline{C}^* \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\left[-x_{20} - j\,(a_1 - a_2)\right]}{\sin\left[x_{20} - ja_2\right]} \right\} \qquad (52)$$

Drei charakteristische Fälle sind hier möglich

1.) $x_{20} = 0$, Störtyp in Resonanz , gleiche Phasenlage wie Haupttyp.

mit

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}[\ \ldots\ldots] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos[\ldots\ldots], = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x_{20}\cosh(a_1-a_2) - j\,\frac{1}{2}\sin x_{20}\sinh(a_1-a_2)$$

$$\sin[x_{20} - ja_2] = \sin x_{20}\cdot\cosh a_2 - j\cos x_{20}\cdot\sinh a_2$$

hier:

$$\mathrm{Im}\left\{\ldots\right\} = \underline{C}\underline{C}^* \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(a_1-a_2)}{\sinh a_2} = \underline{C}\underline{C}^* \frac{\cosh^2\left\{\frac{1}{2}(a_1 - a_2)\right\}}{\sinh a_2}$$

2.) $x_{20} = \pi$, Störtyp in Resonanz aber gegenphasig zum Haupttyp.

$$\mathrm{Im}\left\{\ldots\right\} = \underline{C}\underline{C}^* \frac{\frac{1}{2}\cosh(a_1 - a_2) - \frac{1}{2}}{\sinh a_2} = \underline{C}\underline{C}^* \frac{\sinh^2\left\{\frac{1}{2}(a_1 - a_2)\right\}}{\sinh a_2}$$

3.) $x_{20} = +\pi/2$ oder $x_{20} = -\pi/2$ · Störtyp im Sperrfall

$$\mathrm{Im}\left\{\ldots\right\} = \underline{C}\underline{C}^* \frac{-\frac{1}{2}\sinh(a_1 - a_2)}{\cos a_2} \quad ; \quad \text{Entdämpfung wenn } a_2 < a_1$$

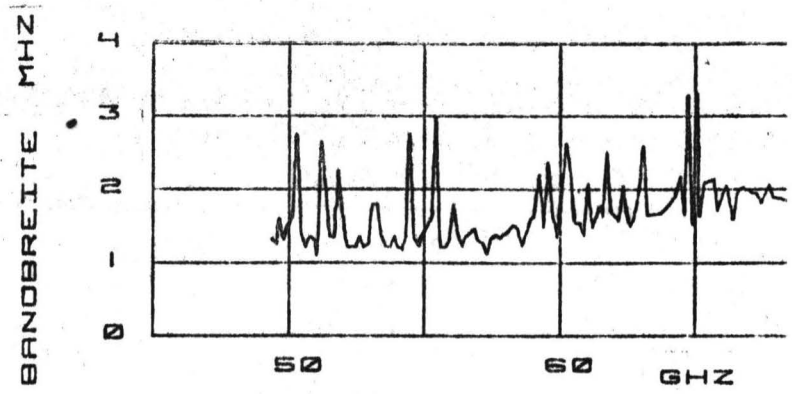
Aus der nachfolgenden Tabelle kann man erkennen, wie stark die (normierte) Bandbreite $\Delta\beta l$ von der Dämpfung des Störtyps abhängt : (53)

$\Delta\beta l \approx$	Störtyp schwach gedämpft $a_2 \ll 1$ allgemein	$a_2 \gg a_1$	Störtyp stark gedämpft $a_2 \gg 1$
$x_{20} = 0$	$a_1 + \frac{\underline{C}\underline{C}^*}{a_2}$	$a_1 + \frac{\underline{C}\underline{C}^*}{a_2}$	$a_1 + \frac{1}{2}\,\underline{C}\underline{C}^*$
$x_{20} = \pi$	$a_1 + \underline{C}\underline{C}^* \frac{(a_1 - a_2)^2}{4\,a_2}$	$a_1 + \underline{C}\underline{C}^* \frac{a_2}{4}$	$a_1 + \frac{1}{2}\,\underline{C}\underline{C}^*$
$x_{20} = +\pi/2$	$a_1 + \underline{C}\underline{C}^* \frac{a_2 - a_1}{2}$	$a_1 + \underline{C}\underline{C}^* \frac{a_2}{2}$	$a_1 + \frac{1}{2}\,\underline{C}\underline{C}^*$

In den beiden stark umrandeten Feldern stehen die größten Bandbreitenerhöhungen. Die Frage : wie groß darf der Koppelfaktor C und wie klein darf die Dämpfung a_2 werden damit die genäherte Bandbreitenbeziehung gültig bleibt, wird im nächsten Kapitel beantwortet.

Die Bandbreitenschwankungen der Haupttyp-Resonanzen dargestellt über $\beta_1 l$ (über der Frequenz beim längenkonstanten Resonator) ist bei unserem Modell der Verkopplung zweier Moden abhängig von dem differentiellen Phasenkonstantenverhältnis $\partial\beta_2/\partial\beta_1$. Weicht dieses deutlich von 1 ab, so ergeben sich "schnelle " Schwankungen mit wenigen Maximalwerten, die bis zu den theoretischen für $x_{20} = 0$ reichen können und häufigeren Minimalwerten wie für $x_{20} = +\pi/2$, π oder $-\pi/2$.

Das folgende Bild zeigt gemessene (durch Striche verbundene) Bandbreitenwerte bei Störwellenanregung in einem H_{01} -Wellen-Resonator mit l = 88 cm und 17 mm Durchmesser.



3.28 Der Einfluss des Störterms bei großen Koppelfaktoren

Bei kleiner Störkreisdämpfung überkritische Verkopplung : Haupttypresonanzkurven mit Einsattlung (zwei Höcker).

Hier soll nun untersucht werden, wie die Parameter des Störtyps (C, a_2 , x_{20}, $\partial\beta_2 / \partial\beta_1$) die Haupttyp-Resonanzkurven deformieren können.
Aus den entstehenden, zweihöckerigen Resonanzkurven lassen sich dann rückwärts die Störparameter analysieren.

Für die nachfolgenden Rechnungen wird vorausgesetzt, daß Haupt- und Störkreisdämpfung klein sind : a_1 , $a_2 \ll 1$

Haupt- und Störwelle seien beide gleichzeitig, gleichphasig ($x_{20} = 0$) in Resonanz. Die Resonanzkurve wird symmetrisch.

Die Hauptresonanz findet statt in unmittelbarer Umgebung von $x_1 = 0$, die sin - Funktionen werden durch ihr Argument, das cos-Quadrat im Störterm Gl. (51 a) durch 1 ersetzt.

Der Betrag des Quadrates der Transmission ist dann proportional :

$$\boxed{T^2 \sim \left| \frac{1}{x_1 - ja_1 - \dfrac{\underline{C}\underline{C}^*}{x_1 \cdot \partial\beta_2/\partial\beta_1 - j\,a_2}} \right|^2} \qquad (54)$$

Es zeigt sich, daß es sinnvoll ist, die Parameter zusammenzufassen und dafür zwei neue Buchstaben einzuführen:

$$\frac{\underline{C}\underline{C}^* \cdot \partial\beta_2/\partial\beta_1}{a_2^2} \equiv K \quad \text{normierte Koppelgröße}$$

$$\frac{a_2}{a_1 \cdot \partial\beta_2/\partial\beta_1} \equiv D \quad \text{normierte Dämpfungsgröße} \qquad (55)$$

Außerdem wird aus dem Nenner von (54) die Dämpfung a_1 ausgeklammert und nicht mehr mit hingeschrieben.

Damit lautet der Nenner von Gl (54)

$$\underline{N} = \frac{x_1}{a_1} - j - \frac{D^2 \cdot K}{\frac{x_1}{a_1} - j D}$$

Vorübergehend wird abgekürzt : $\frac{x_1}{a_1} = X$ und das Betragsquadrat des Nenner ausgerechnet

$$\underline{N}\underline{N}^* = \left\{ \left(X - j \right) - \frac{D^2 \cdot K}{X - j D} \right\} \cdot \left\{ \left(X + j \right) - \frac{D^2 \cdot K}{X + j D} \right\}$$

$$= X^2 + 1 + \frac{D^4 K^2}{X^2 + D^2} - 2 D^2 K \frac{X^2 - D}{X^2 + D}$$

nach Abspalten des ganzrationalen Anteils :

$$NN^* = X^2 + 1 - 2 D^2 K + \frac{KD^3 (KD + 2 D + 2)}{X^2 + D^2} \qquad (56)$$

Dieses ist (bis auf einen konstanten Faktor) die reziproke Resonanzkurve (Betragsquadrat der Transmission) für gleichzeitige Resonanz des Störtyps. Sie ist symmetrisch zu $X = 0$. Eine Verschiebung der Störresonanzfrequenz ($x_{20} \neq 0$) macht diese Kurve unsymmetrisch : neben X^2 tritt X dann auch linear auf.

Die im vorigen Abschnitt aufgetauchte Frage, welche Werte die Störparameter annehmen dürfen, damit bei gleichzeitiger Resonanz die Kurvenform der einfachen Resonanz erhalten bleibt (nur Bandbreitenerhöhung) , kann nun beantwortet werden: Gl (53 eingerahmt) gilt dann nicht mehr, wenn die Resonanzkurve einzusatteln beginnt: Gl. (56) hat dann drei Extremstellen.

$$\frac{d\, NN^*}{d\, X} = 2 X - KD^3 (KD + 2 D + 2) \frac{2 X}{(X^2 + D^2)^2} \overset{!}{=} 0 \qquad (57)$$

1. Lösung : $X = X_s = 0$ Einsattelung

$$(X^2 + D^2)^2 - KD^3 (KD + 2 D + 2) \overset{!}{=} 0 \qquad (57 a)$$

2. und 3. Lösung :

$$X_H^2 = KD^2 \left[\sqrt{1 + \frac{2}{K} \left(1 + \frac{1}{D} \right)} - \frac{1}{K} \right] \text{ Höckerkoordinate} \qquad (58)$$

3.29 Kritische Kopplung

Die sogenannte " Kritische Kopplung " erhält man durch Nullsetzen der eckigen Klammer in Gl (58) :

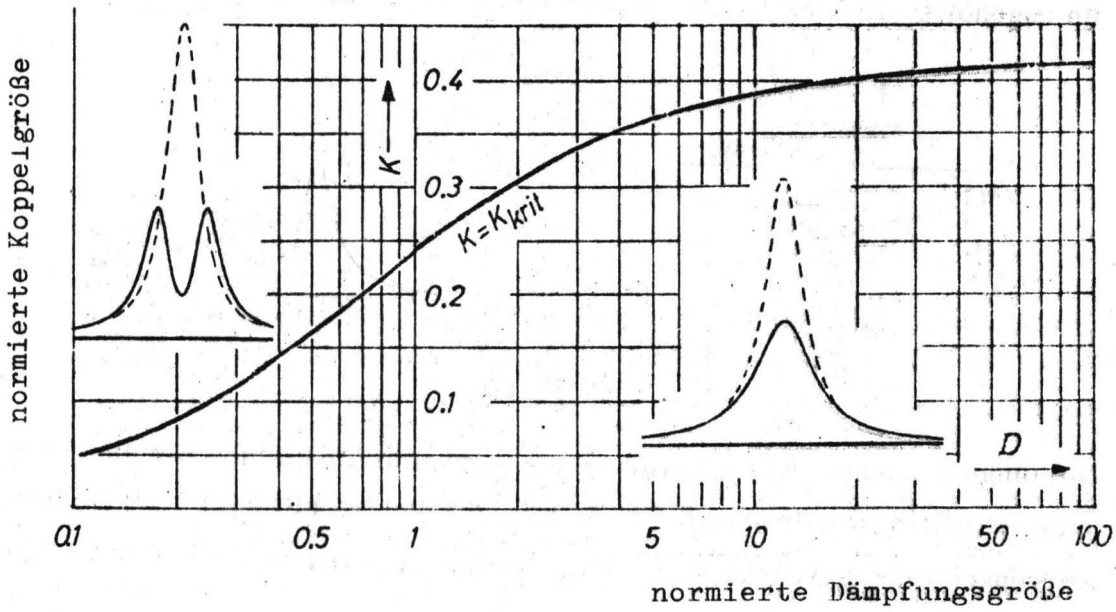
$$\sqrt{1+\frac{2}{K_{krit}}\left(1+\frac{1}{D}\right)} - \frac{1}{K_{krit}} = 0$$

$$\boxed{K_{krit} = +\sqrt{\left(1+\frac{1}{D}\right)^2 + 1} - \left(1+\frac{1}{D}\right)} \qquad (59)$$

nach Einsetzen der Störparameter mit (55) :

$$C_{krit} = a_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\partial\beta_2/\partial\beta_1}\left[\sqrt{1+\left(1+\frac{a_1\cdot\partial\beta_2/\partial\beta_1}{a_2}\right)^2} - \left(1+\frac{a_1\,\partial\beta_2/\partial\beta_1}{a_2}\right)\right]}$$

Im halblogarithmischen Maßstab sind auf dem nachfolgenden Bild die Bereiche für unter- und überkritische Kopplung mit den normierten Größen gemäß Gl (59) dargestellt.



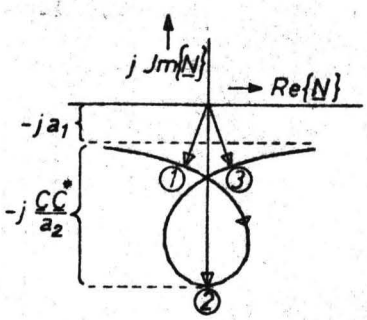
Bis auf den Faktor $\partial\beta_2/\partial\beta_1$ ist die kritische Kopplung nur abhängig von den Dämpfungen für Haupt- und Störwelle.

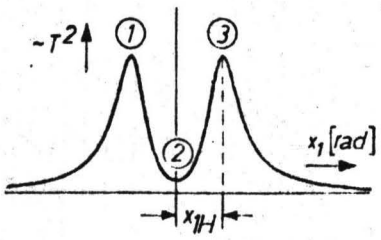
Zweihöckerige Hauptresonanzkurven treten mit Sicherheit auf, wenn der Koppelfaktor (dimensionslos) größer als das 0, 7fache der Störkreisdämpfung(in Neper)ist.

3.3 Die Analyse gemessener Haupttyp-Resonanzkurven bei starker Verkopplung der Hauptwelle mit einer Störwelle. Überkritisch verkoppelte Resonanzkreise.

Wiederholend sei noch einmal die Schaltanordnung beschrieben : Ein symmetrischer Transmissions-Leitungsresonator wird mit der Hauptwelle betrieben. Dabei wird z. B. bei konstanter Länge die Frequenz (hier normiert = x_1) variiert. In der Mitte befindet sich eine unbekannte Störstelle (Voraussetzung : reflexionsfrei, verlustlos und punktförmig) an der eine unbekannte Störwelle angeregt wird. Deren Resonanz, die direkt nur schwer zu messen ist, deformiert aber die Haupttyp-Resonanz, auf charakteristische Weise, so daß sich aus dieser Eigenschaften der Störstelle(= Koppelstelle) und der Störwelle ermitteln lassen. Voraussetzung ist allerdings, daß die Störwelle hinreichend stark angeregt wird, Gl. (59) gibt hierzu Auskunft. Die absoluten Werte der Transmission entsprechend Gl. (51) , nämlich das Verhältnis ausgekoppelte zu eingekoppelte Leistung, ist meist schwer zu messen; die Analyse beschränkt sich deshalb auf die Kurvenformen der Resonanzen, für sie ist allein der Nenner der Transmission zuständig.

Einen Ausschnitt aus der Ortskurve des Nenners bei gleichzeitiger Resonanz und die zugehörige Resonanzkurve zeigen die beiden Bilder:





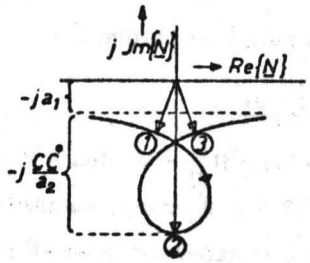
Die eingezeichneten Werte gelten näherungsweise für kleine Dämpfungen a_1 und a_2. Für nicht gleichzeitige Resonanz , z. B. $x_{20} > 0$ (Störtyp eilt vor) denke man sich die Ortskurvenschleife nach links verschoben:Höcker 1 wird kleiner , 3 wird größer, beide wandern etwas nach links.

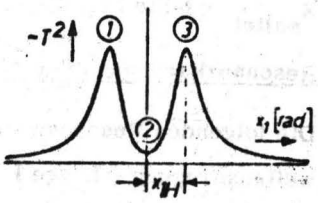
Wie beeinflussen nun die Parameter(Dämpfung a_1 und a_2, Koppelfaktor C, differentielles Phasenkonstantenverhältnis $\partial\beta_2/\partial\beta_1$ und die "Verstimmung" x_{20}) die Form der Haupttypresonanzen ? Errechnet man z. B. das Verhältnis Einsattelung/Höcker für gleichzeitige Resonanz, so ergibt sich ein der einfachen Ausgangsgleichung (54) unangemessen unhandlicher Ausdruck in K und D. Große Koppelfaktoren und kleine Dämpfungen erzeugen tiefe Einsattelungen.

3.3 Die Analyse gemessener Haupttyp-Resonanzkurven bei starker Verkopplung der Hauptwelle mit einer Störwelle. Überkritisch verkoppelte Resonanzkreise.

Wiederholend sei noch einmal die Schaltanordnung beschrieben : Ein symmetrischer Transmissions-Leitungsresonator wird mit der Hauptwelle betrieben. Dabei wird z.B. bei konstanter Länge die Frequenz (hier normiert = x_1) variiert. In der Mitte befindet sich eine unbekannte Störstelle (Voraussetzung : reflexionsfrei, verlustlos und punktförmig) an der eine unbekannte Störwelle angeregt wird. Deren Resonanz, die direkt nur schwer zu messen ist, deformiert aber die Haupttyp-Resonanz, auf charakteristische Weise, so daß sich aus dieser Eigenschaften der Störstelle(= Koppelstelle) und der Störwelle ermitteln lassen. Voraussetzung ist allerdings, daß die Störwelle hinreichend stark angeregt wird, Gl. (59) gibt hierzu Auskunft. Die absoluten Werte der Transmission entsprechend Gl. (51) , nämlich das Verhältnis ausgekoppelte zu eingekoppelte Leistung, ist meist schwer zu messen; die Analyse beschränkt sich deshalb auf die Kurvenformen der Resonanzen, für sie ist allein der Nenner der Transmission zuständig.

Einen Ausschnitt aus der Ortskurve des Nenners bei gleichzeitiger Resonanz und die zugehörige Resonanzkurve zeigen die beiden Bilder:



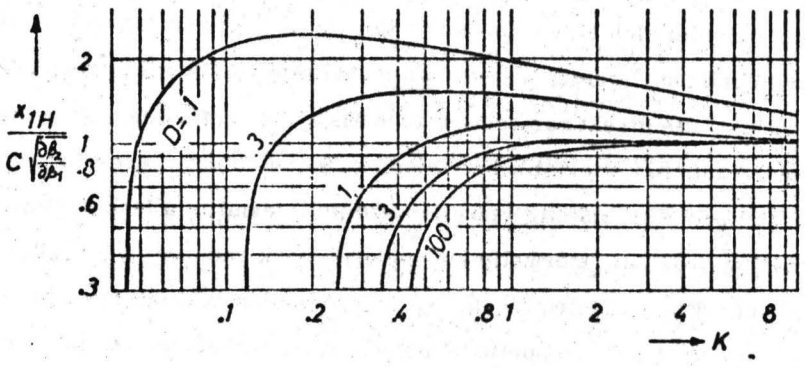


Die eingezeichneten Werte gelten näherungsweise für kleine Dämpfungen a_1 und a_2. Für nicht gleichzeitige Resonanz , z.B. $x_{20} > 0$ (Störtyp eilt vor) denke man sich die Ortskurvenschleife nach links verschoben:Höcker 1 wird kleiner , 3 wird größer, beide wandern etwas nach links.

Wie beeinflussen nun die Parameter(Dämpfung a_1 und a_2, Koppelfaktor C, differentielles Phasenkonstantenverhältnis $\partial\theta_2/\partial\theta_1$ und die "Verstimmung" x_{20}) die Form der Haupttypresonanzen ? Errechnet man z.B. das Verhältnis Einsattelung/Höcker für gleichzeitige Resonanz, so ergibt sich ein der einfachen Ausgangsgleichung (54) unangemessen unhandlicher Ausdruck in K und D. Große Koppelfaktoren und kleine Dämpfungen erzeugen tiefe Einsattelungen.

Der Höckerabstand bei gleichzeitiger Resonanz ist hingegen recht aufschlußreich. Er ist gleich dem doppelten Wert für die Höckerkoordinate x_{1H}, wie sie durch Gl. (58) gegeben ist. Für den Faktor KD^2 werden die Parameter nach (55) eingesetzt:

$$x_{1H} = \frac{C}{\sqrt{\partial\beta_2/\partial\beta_1}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2}{K}\left(1 + \frac{1}{D}\right)} - \frac{1}{K}} \quad [\mathrm{rad}] \qquad (60)$$



Für $\partial\beta_2/\partial\beta_1 \approx 1$ wird für hinreichend große Kopplung und Störwellendämpfung ($K > 1$, $D > 1$) der halbe Höckerabstand (in Radian) gleich dem Koppelfaktor !

Unsymmetrische Resonanzkurven entstehen bei "Verstimmung " ($x_{20} \neq o$) der beiden Kreise. Die Berechnung der Höckerkoordinaten erfordert die Lösung einer Gleichung 5. Grades. Aus Gl. (57) lässt sich dann nicht mehr mit der 1. Lösung $X_{sattel} = 0$ die biquadratische Gleichung (57 a) abspalten.

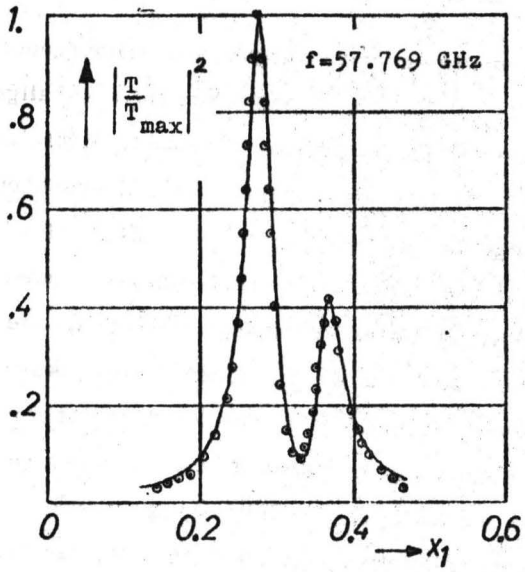
Resonanzkurvenanalyse mit dem Digitalrechner

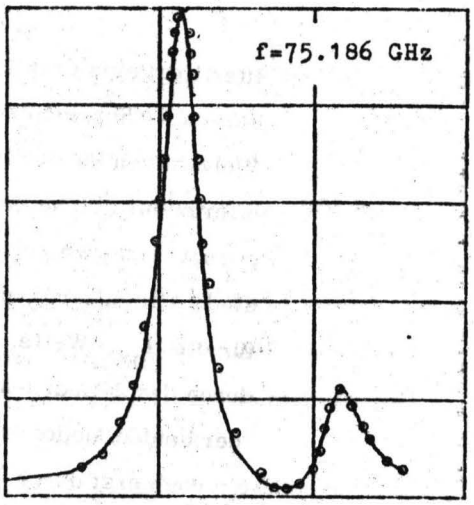
Die folgenden Resonanzkurven wurden an einem H_{01} - Wellen - Resonator mit Störwellenanregung (Länge l - 880 mm , D = 17 mm ⌀) aufgezeichnet und nach Gl. (51) ausgewertet [5]. Dabei werden die Koordinaten von etwa 40 Punkten einer jeden Resonanzkurve dem Rechner übergeben. Der theoretische Kurvenverlauf mit einem geschätzten Anfangsparametersatz wird für dieselben Abszissenwerte berechnet und gleichzeitig mit der Meßkurve auf einem Sichtgerät dargestellt, der Anfangsparametersatz wird mehrmals verbessert, bis die theoretische Kurve durch ein " Ausgleichrechenprogramm nach vermittelnden Beobachtungen für nichtlineare Funktionen" durch Variation ihrer Parameter an die Messkurve angenähert wird [6] . Die nichtlineare Funktion (Betragsquadrat von (51)) wird dabei um den Anfangsparametersatz nach Taylor entwickelt und die Matrix der partiellen Ableitungen nach dem Gauß'schen Verfahren der Ausgleichsrechnung (Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate) behandelt.

Die durchgezogene Kurve ist die theoretische mit dem angeschriebenen Parametersatz, die Kringel sind der Meßkurve entnommene Werte. Beide Kurven wurden auf den Maximalwert normiert.

An gemessene Resonanzkurven (Kringel) angenäherte theoretische Kurven (durchgezogen

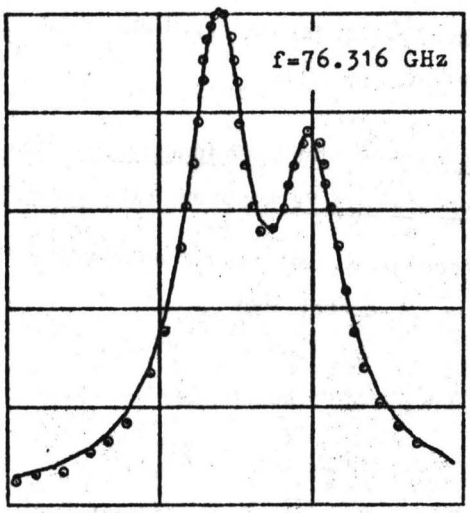
Für $\partial\beta_2 / \partial\beta_1$ wurde in allen Fällen 1 eingesetzt



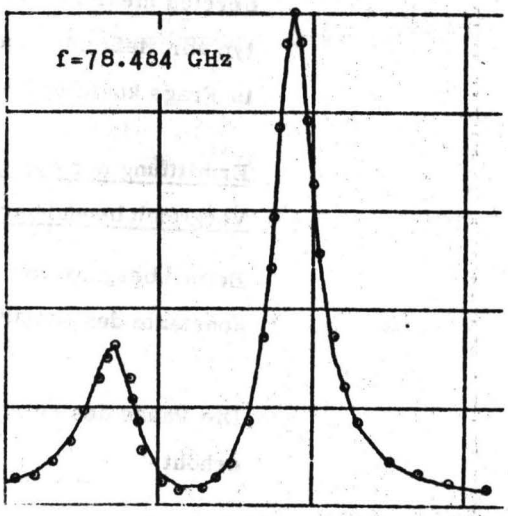


Analysierte Parameter :

Hauptkreisdämpfung	$a_1 = 0.020$ [Neper]	$a_1 = 0.027$
Störkreisdämpfung	$a_2 = 0.020$ [Neper]	$a_2 = 0.032$
Koppelfaktor	$C = 0.040$	$C = 0.091$
Verstimmung	$x_{20} = -0.023$ [rad]	$x_{20} = -0.076$



$a_1 = 0.041$
$a_2 = 0.058$
$C = 0.055$
$x_{20} = -0.013$



$a_1 = 0.022$
$a_2 = 0.048$
$C = 0.109$
$x_{20} = 0.054$

3.31 Störwellenanalyse im Multimode - Resonator mit Hilfe analysierter Haupttyp - Resonanzen

Hier liegt eine praktische Anwendung der vorausgegangenen Überlegungen. Störstellen (Inhomogenitäten) in H_{01} - Übertragungsstrecken regen im allgemeinen eine Vielzahl von Störwellen an. In einer Transmissions -Resonanz-Meßschaltung deformieren nur solche Störwellen die Haupttyp-Resonanzkurven, die genügend stark angeregt, schwach gedämpft und gleichzeitig oder fast gleichzeitig mit in Resonanz sind. Alle anderen sind (fast) ohne Einfluß oder erhöhen nur scheinbar die Dämpfung für die H_{01} - Welle. Die Selektivität dieses Verfahrens rechtfertigt die Beschreibung durch das 2 Moden-Modell. Wenn auch aus einer solchen Resonanzkurve die Dämpfung der beiden Moden und ihre Kopplung ermittelt werden kann, so ist der Störwellentyp doch erst durch z. B. die Kenntnis seiner Fortpflanzungskonstanten β_2 identifizierbar. In praktischen Fällen wird eine H_{01} - Übertragungsstrecke bei so hohen Frequenzen betrieben, daß viele Störwellen weit oberhalb ihrer Grenzfrequenzen ausbreitungsfähig sind und mit ihren Phasenkonstanten dicht an der der H_{01} - Welle liegen. Das differentielle Phasenkonstantenverhältnis $\partial\beta_2/\partial\beta_1$ ist für alle diese Störwellen so dicht an 1 , daß es aus den einzelnen Resonanzkurven mit extremer Genauigkeit analysiert werden müßte. Dies ist nicht möglich: gerade dieser Parameter beeinflußt die Kurvenform nur wenig. Liegen aber im hinreichend kleinen Frequenzbereich mehrere Resonanzkurven bei Verkopplung mit jeweils demselben Störwellentyp vor, läßt sich auch dessen Phasenkonstante ermitteln, wenn $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ für alle in Frage kommenden Störwellen bekannt ist.

Ermittlung der Störtyp - Phasenkonstanten beim längenkonstanten Resonator durch Vergleich benachbarter Resonanzen bei Verkopplung mit demselben Störwellentyp

Beim Übergang von einer Resonanzfrequenz zur nächsthöheren hat sich die Phasenkonstante des Haupttyps so um $\delta\beta_1$ erhöht, daß

$$\delta\beta_1 \, l = \pi$$

Die Phase des Störtyps hat sich um die Zunahme der Verstimmung δx_{20} stärker erhöht

$$\delta\beta_2 l = \delta\beta_1 \, l + \delta x_{20}$$

Zwischen beiden Phasenkonstanten besteht ein Zusammenhang $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ so daß

$$\delta\beta_2 = \frac{\partial\beta_1}{\partial\beta_2} \cdot \delta\beta_1$$

Daraus

$$\boxed{\frac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1} = 1 + \frac{\delta x_{20}}{\pi}} \qquad (61)$$

Bei normaler Dispersion im Hohlleiter sind die Phasenkonstanten der Wellentypen nur aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenwerte verschieden :

$$\beta_1 = \sqrt{k^2 - q_1^2} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \sqrt{k^2 - q_2^2}$$

$$\beta_2 = \sqrt{\beta_1^2 + q_1^2 - q_2^2} \; ; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} = \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + q_1^2 - q_2^2}} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\beta_1}{1 + \frac{\delta x_{20}}{\pi}}} \qquad (61\ a)$$

Ermittlung der Störtyp - Phasenkonstanten durch kleine Variation der Länge [7]

Zwei Resonanzkurven werden bei nur wenig verschiedenen Längen des Resonators (l und l + δ l) aufgenommen. Die aus diesen Kurven analysierten Verstimmungen (x_{20} und $x_{20} + \delta x_{20}$) unterscheiden sich un den kleinen Anteil δx_{20} .
Um für den Haupttyp nach Verlängern des Resonators dieselbe Halbwellenanzahl N_1 beizubehalten , muß seine Phasenkonstante erniedrigt werden:

$$(\beta_1 + \delta\beta_1) \; (l + \delta l) \overset{!}{=} N_1 \cdot \pi$$

daraus $\qquad \beta_1 = - \beta_1 \frac{\delta l}{l}$ (Produkte der kleinen Größen vernachlässigt)

Die Änderung $\delta\beta_1$ erzeugt eine Änderung $\delta\beta_2$ gemäß

$$\delta\beta_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \cdot \delta\beta_1$$

Die Phase des Störtyps hat sich um die Zunahme der Verstimmung stärker erhöht als die des Haupttyps

$$(\beta_2 + \delta\beta_2) (l + \delta l) = (\beta_1 + \delta\beta_1) (l + \delta l) + x_{20} + \delta x_{20}$$

daraus : $\quad \beta_2 l + (\beta_1 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1}) \delta l = \beta_1 l + x_{20} + \delta x_{20}$

$$\boxed{\frac{\partial x_{20}}{\partial l} = \beta_2 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \cdot \beta_1} \qquad (62)$$

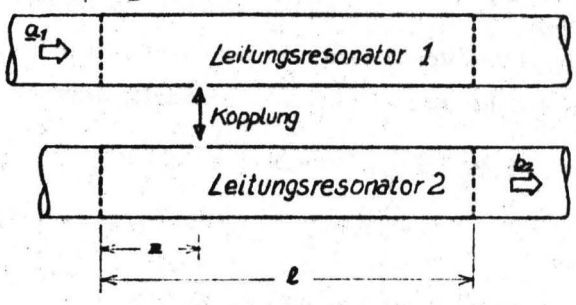
Für normale Dispersion :

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\partial x_{20}}{2\,\partial l} + \sqrt{\left(\frac{\partial x_{20}}{2\,\partial l} \right)^2 + \beta_1^2}} \qquad (62\ a)$$

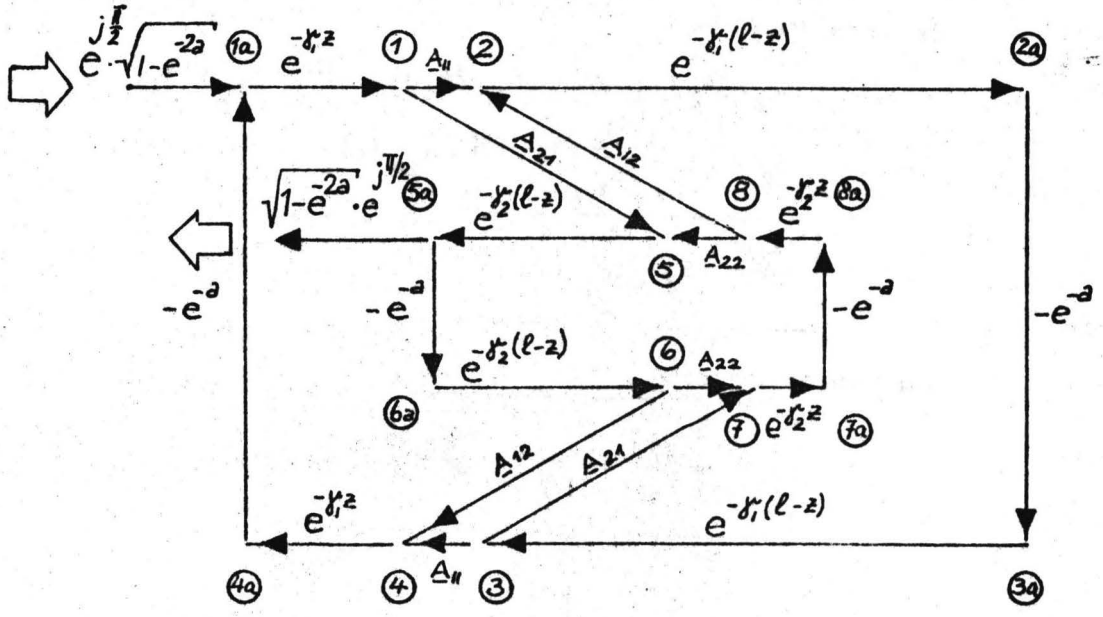
3.4 Die Resonanz der Störwelle. Einkopplung der Hauptwelle und selektive Auskopplung der Störwelle.

Bisher wurde nur das Übertragungsverhalten des Leitungsresonators für den eingekoppelten Hauptwellentyp betrachtet. Die im Inneren des Resonators an der Störstelle angeregte Störwelle gerät ebenfalls in Resonanz, entzieht der Hauptwelle Energie und "stört" deren Resonanzen. Ein Teil der Störwelle verläßt den Resonator und ist damit z. B. einer direkten Messung zugänglich.

Für die Berechnung wird wieder das Modell zweier Resonatoren herangezogen



Das zugehörige Signalflußdiagramm kann fast unverändert von S. 53 übernommen werden .



Im Nenner der Transmissionsformel stehen nur die Schleifen. Es sind dieselben wie für die Transmission des Haupttyps. Der Nenner Gl.(40a) wird direkt übernommen. Geändert haben sich allerdings die Pfade:

Pfade : $\boxed{I} = e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,\underline{A}_{21}\,e^{-\gamma_1 z-\gamma_2(\ell-z)}$ dieser Pfad berührt die Schleife (IV) nicht

$\boxed{II} = e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,e^{-2a}\,A_{11}A_{22}A_{21}\,e^{-\gamma_1(2\ell-z)-\gamma_2(\ell+z)}$

mit der Schleife (IV) $= A_{12}A_{21}\,e^{-2a}\,e^{-2\gamma_1(\ell-z)-2\gamma_2 z}$ lautet der Zähler der Transmission :

$$\text{Zähler} = \boxed{I}\,(1-(IV)) + \boxed{II}$$

$$= e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,\underline{A}_{21}\left\{e^{-\gamma_1 z-\gamma_2(\ell-z)} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{-2a-2\gamma_1(\ell-z)-2\gamma_2 z-\gamma_1 z-\gamma_2(\ell-z)} + e^{-2a}\,\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}\,e^{-\gamma_1(2\ell-z)-\gamma_2(\ell+z)}\right\}$$

$$= e^{j\pi}(1-e^{-2a})\,\underline{A}_{21}\left\{e^{-\gamma_1 z-\gamma_2(\ell-z)} + e^{-2a}\cdot e^{-\gamma_1(2\ell-z)-\gamma_2(\ell+z)}\cdot\underbrace{\left[\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\right]}_{=e^{-j2\Phi}\ \text{mit Gl.(\ )}}\right\}$$

ausklammern von $e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-j\Phi}$ wie im Nenner :

$$\text{Zähler} = e^{j\pi}\underbrace{(e^{a}-e^{-a})}_{=2\cdot\sinh a}\,\underline{A}_{21}\,e^{-2a-(\gamma_1+\gamma_2)\ell-j\Phi}\underbrace{\left\{e^{a+\gamma_1(\ell-z)+\gamma_2 z+j\Phi} + e^{-a-\gamma_1(\ell-z)-\gamma_2 z-j\Phi}\right\}}_{=2\cdot\cosh\{a+j\Phi+\gamma_1(\ell-z)+\gamma_2 z\}}$$

mit dem Nenner Gl. (40a) erhält man schließlich für diese Transmission

$$T = \frac{e^{j\pi}\cdot 4\,\sinh a\cdot\underline{A}_{21}\,e^{-2a-(\gamma_1-\gamma_2)\ell-j\Phi}\cdot\cosh\{a+j\Phi+\gamma_1(\ell-z)+\gamma_2 z\}}{4\,e^{-2a-(\gamma_1-\gamma_2)\ell-2j\Phi}\left[\sinh\{\gamma_1\ell+a+j\Phi+j\Theta\}\sinh\{\gamma_2\ell+a+j\Phi-j\Theta\} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{j2\Phi}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)(\ell-z)+j\Theta\}\cosh\{(\gamma_1-\gamma_2)z+j\Theta\}\right]}$$

nach Kürzen und durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt :

$$T = \frac{\underline{A}_{21}\,\sinh a\cdot e^{j\Phi}\cos\{\beta_1(\ell-z)+\beta_2 z+\Phi - j[a+\alpha_1(\ell-z)+\alpha_2 z]\}}{\sin\{\beta_1\ell+\Phi+\Theta-j(\alpha_1\ell+a)\}\sin\{\beta_2\ell+\Phi-\Theta-j(\alpha_2\ell+a)\} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\,e^{j2\Phi}\cos\{(\beta_1-\beta_2)(\ell-z)+\Theta-j(\alpha_1-\alpha_2)(\ell-z)\}\cos\{(\beta_1-\beta_2)z+\Theta-j(\alpha_1-\alpha_2)z\}} \qquad (62)$$

3.41 Kurvendarstellungen. Vergleich : Haupttypresonanz - Störtypresonanz für punkt - förmige Verkopplung in der Mitte des Resonators.

Auf der folgenden Seite sind Resonanz- und Ortskurven für die ausgekoppelte Haupt- und Störwelle gemeinsam dargestellt. Aus der Vielzahl möglicher Kurven, die durch Kombination der Parameter entstehen können, sind die einfachsten ausgewählt : Beide Wellentypen breiten sich verlustlos auf der Leitung aus : $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ihre Resonanzen werden nur "bedämpft" durch Ein- und Auskoppelblende. Mit den Gl. (44) und (45) sowie (48) und (49) wird dann aus Gl. (6) :

$$\underline{T}_{Stör} = \frac{-\underline{C} \cdot \sinh a \cdot \cos\left\{\frac{x_1 + x_2}{2} - j\,a\right\}}{\sin\left\{x_1 - ja\right\} \cdot \sin\left\{x_2 - ja\right\} - CC^* \cos^2\left\{\frac{x_1 - x_2}{2}\right\}}$$

Weiterhin haben beide Wellentypen stets die gleiche Phase $x_2 = x_1 = x$ (z.B. bei gleicher Phasenkonstante $\beta_2 = \beta_1$) . Dann wird aus Gl. (6) :

$$\underline{T}_{Stör} = \frac{-\underline{C} \sinh a \cdot \cos\left\{x - ja\right\}}{\sin^2\left\{x - ja\right\} - CC^*}$$

$$\underline{T}_{Stör} = \frac{\underline{C} \sinh a}{\cos\left\{x - ja\right\} - (1 - CC^*)\,\dfrac{1}{\cos\left\{x - ja\right\}}}$$

Vergleicht man nun diese Gl. (6) mit der Transmission für den Haupttyp Gl. (5O), so erscheint 1. wegen (44) und (45) hier der cos statt des sin, und 2. hat hier der Koppelfaktor seinen Platz mit der "Transmission" über die Koppelstelle hinweg vertauscht:

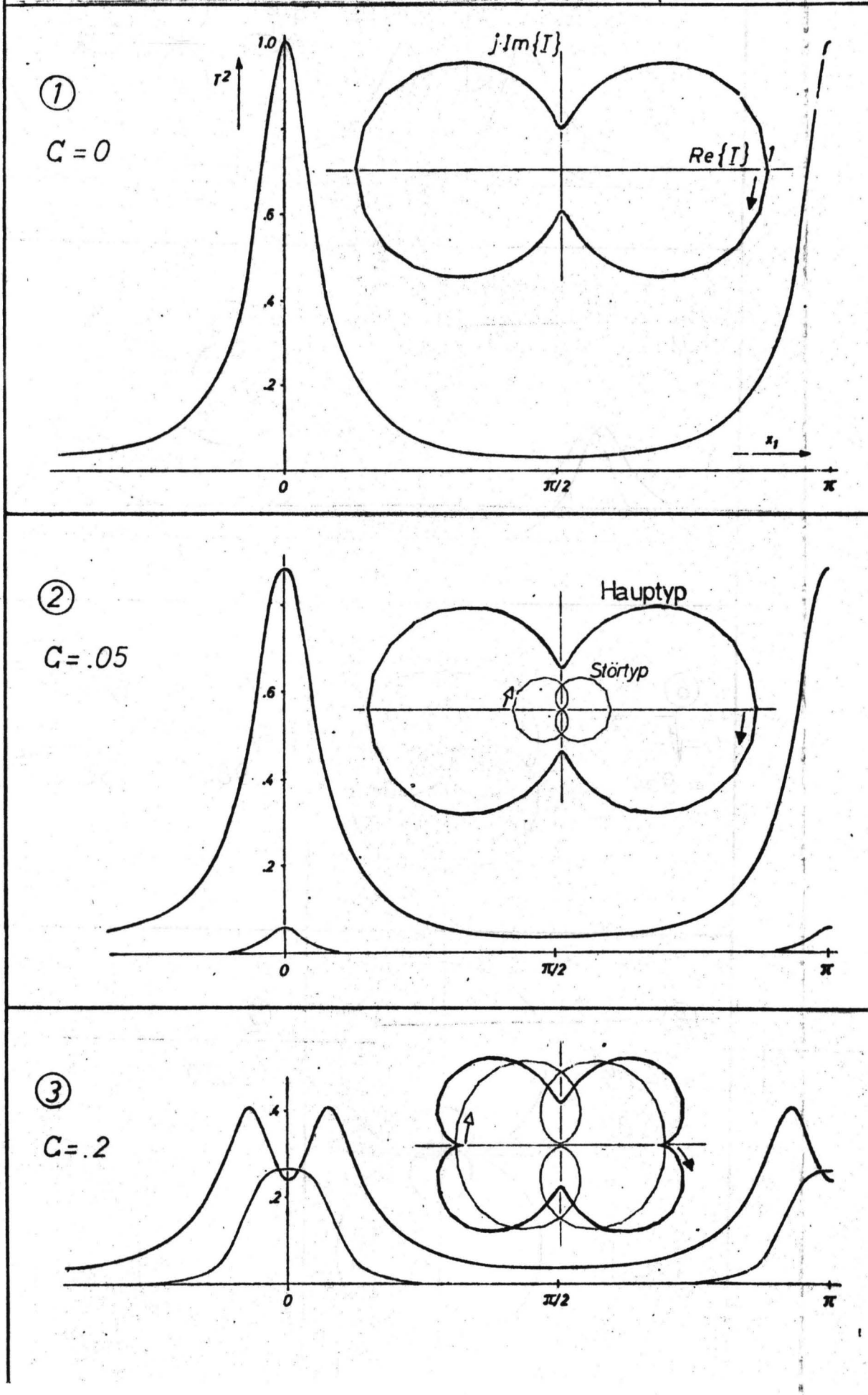
$$\underline{C}\underline{C}^* \longleftrightarrow (1 - \underline{C}\underline{C}^*) \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{1 - \underline{C}\underline{C}^*} \longleftrightarrow \underline{C}.$$

Für $C = 1$ (totale Kopplung) ist aus dieser Anordnung wieder ein einfacher Resonator geworden!

Damit in den Bildern die Ortskurven nicht übereinanderliegen wird $\underline{C}$ reell eingesetzt. Die gemeinsame Dämpfung a ist 0,2 Neper.

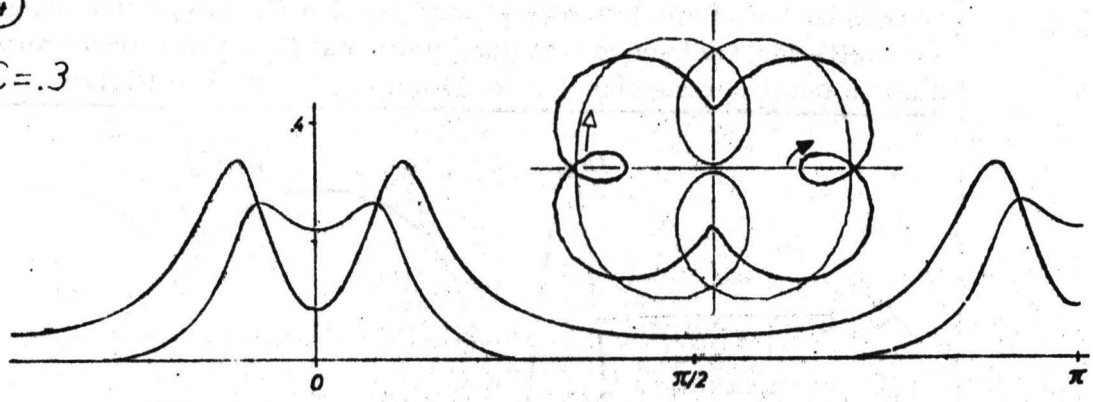
Resonanzkurven der Haupt- und Störwelle

Dargestellt sind die Transmissionen für den Haupttyp(dick ausgezogen) und die Störwelle für wachsende Kopplung bei sonst gleichen Parametern. In Bild 1 und 9 2 und 8 usw. vertauschen beide Resonanzen nur ihre Plätze !



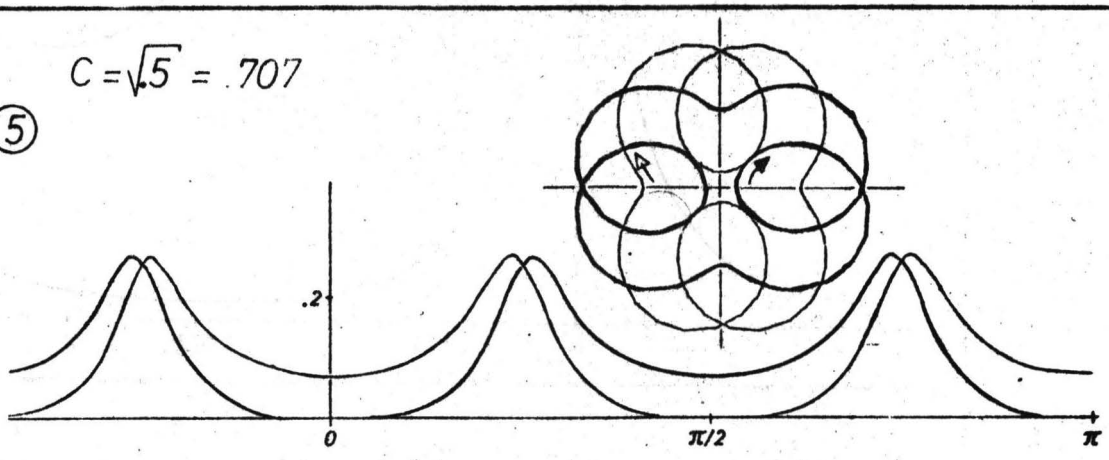
④

$C = .3$



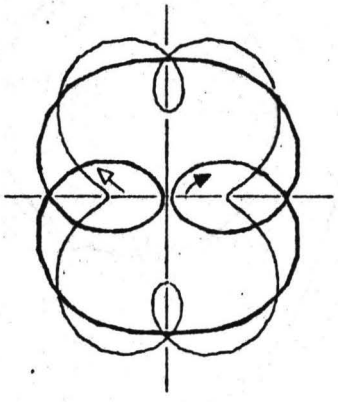
⑤

$C = \sqrt{.5} = .707$



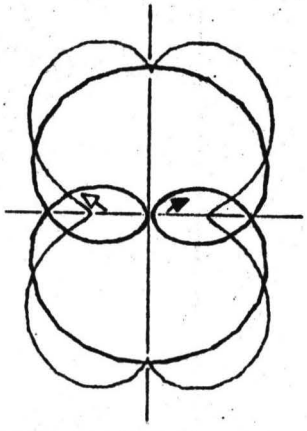
⑥

$C = \sqrt{1 - .3^2}$
$= .954$



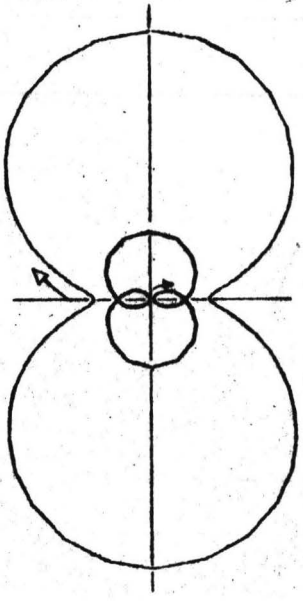
⑦

$C = \sqrt{1 - .2^2}$
$= .980$



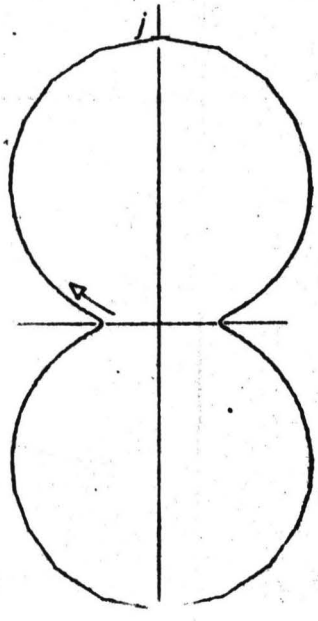
⑧

$C = \sqrt{1 - .05^2}$
$= .9987$



⑨

$C = 1.000$



Zusammenfassung

In der Vorbetrachtung werden am Beispiel eines Leitungsabschnittes und einer Reflexionsstelle die Begriffe Wellengröße, Streumatrix, Signalflußdiagramm und Unitarität erläutert.

Darauf folgen in den Kapiteln 1,2 und 3 mit wachsender Kompliziertheit der einfache, der serien- und der parallel gekoppelte Leitungsresonator.

Das Übertragungsverhalten des einfachen Resonators wird deshalb so ausführlich erläutert, weil der serien- und parallel gekoppelte Leitungsresonator als Erweiterung dieses einfachen Resonators aufgefaßt wird und für totale bzw. verschwindende Kopplung in diesen übergeht. Eine für Leitungsresonatoren zugeschnittene Bandbreitendefinition wird angegeben.

Der seriengekoppelte Leitungsresonator entsteht aus der Hintereinanderschaltung zweier einfacher Resonatoren, sein Übertragungsverhalten wird für beliebige Kopplung zwischen Null und Eins diskutiert. Der Begriff "Kritische Kopplung" wird erklärt.

Das Übertragungsverhalten zweier parallel verkoppelter Leitungsresonatoren wird allgemein für eine beleibig verteilte Kopplung abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Koppelstelle reflexionsfrei ist. Im Gegensatz zu der Arbeit von I. A. Young und D. Marcuse [7] wird hier nicht davon ausgegangen, daß der Koppelfaktor klein gegen Eins sein muß. Der Verzicht auf diese Näherung erhöht zwar den Aufwand an Zwischenrechnung, liefert aber folgendes kurze und vor allem anschauliche Ergebnis: die Ortskurve der reziproken Übertragungsfunktion setzt sich additiv aus zwei einzelnen Ortskurven zusammen, von denen jede nur durch jeweils einen Resonanzkreis erzeugt wird.

In der ausführlichen Diskussion wird folgende Frage beantwortet: Wie verändern sich die Resonanzen des einen Leitungsresonators, wenn ein zweiter (beliebig verstimmt, beliebig

bedämpft) beliebig stark an den ersten angekoppelt wird ? Die Bedingung für überkritische Kopplung wird angegeben, hier ist der Höckerabstand der eingesattelten Resonanzkurven ein direktes Maß für den Absolutbetrag des Koppelfaktors.

Im Multi - Mode - Resonator, in dem durch Änderung der Resonatorlänge fast gleichzeitige Resonanzen des Hauptwellentyps mit jeweils nur einer Störwelle eingestellt werden können, liefert die Analyse eingesattelter H_{01} - Resonanzen den Koppelfaktor und die Phasenkonstante dieser Störwelle.

Zum Abschluß wird die Ambivalenz zwischen Haupt- und Störresonanzkreis gezeigt: Der Koppelfaktor Null bedeutet ja einen einfachen Leitungsresonator, läuft der Koppelfaktor gegen Eins, so entsteht wieder ein einfacher Resonator.

Ich danke Frau Kerner für das Schreiben des Textes und der komplizierten Formeln.

Literatur

[1] Hans Brand : " Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze"
S. Hirzel Verlag Stuttgart , 1970

[2] Arne Fiebig : "Lineare Signalflußdiagramme"
A.E.Ü. Band 15 (1961), Heft 6, S. 285

[3] Bernd Strebel : "Mikrowellenmeßtechnik"
Manuskript zur Vorlesung an der Technischen Universität Berlin 1975

[4] H. Meinke, F.W. Gundlach :
"Taschenbuch der Hochfrequenztechnik"
Springer-Verlag

[5] Rainer Burkhardt, Diplomarbeit Nr. 228
Institut für Hochfrequenztechnik der TU Berlin

[6] Peter Nolting : " Untersuchung an periodisch dotierten Einkristallen aus InSb ", Anhang.
Dissertation am Fachbereich 19 (Elektrotechnik) der TU -Berlin.

[7] J.A. Young, D. Marcuse
" Waveguide Measurements in Multimode Cavaties"
Presented at the Symposium on Millimeter Waves,
Polytechnic Institute of Brooklyn, March 31, April 1 and 2 , 1959

[8] B. Strebel:
" Die Bandbreite eines H_{01}-Wellenresonators, in dem mehrere Störwellentypen schwach gekoppelt sind"
Technischer Bericht Nr. 112 des Heinrich-Hertz-Instituts Berlin , 1969